

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

TRABAJO DE GRADO

APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN MITTAG-LEFFLER EN LA  
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE  
ORDEN FRACCIONAL

Autor: Michell Paulina Restrepo Segura

Director: Pedro Pablo Cárdenas Alzate Ph.D(c)

Trabajo presentado como requisito para optar al título de  
MAGISTER EN MATEMÁTICAS

Junio del 2019

# Agradecimientos

Agradezco a Dios, a mi madre Gloria Inés Segura,  
a familiares, a mis amigos  
y al profesor Pedro Pablo...

# Resumen

La resolución de ecuaciones diferenciales de orden fraccional ha despertado gran interés en los últimos años en la matemática, física, química e ingeniería porque permite establecer modelos matemáticos para problemas del mundo real. En el trabajo se describe y se analiza el método propuesto por Rida y Arafa para la resolución de ecuaciones diferenciales homogéneas lineales y el método propuesto por YanQuin et al. para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales homogéneas lineales y no lineales; estos métodos construyen una función solución en series de potencias por medio de la función Mittag-Leffler definida para una variable real positiva. Se comprobó la confiabilidad de los dos métodos realizando las gráficas de la solución establecida, variando los parámetros ( $\alpha$  y coeficiente) para determinar si la función solución en series de potencias converge a una solución exacta, adicionalmente se comparó la solución en series de potencias para  $\alpha = 1$  con la solución analítica cuando la ecuación diferencial es de orden entero. Por último se resolvieron algunos ejemplos con otras técnicas de solución para comparar las soluciones obtenidas con el método de la función Mittag-Leffler. Este método es eficiente y poderoso para resolver ecuaciones diferenciales de orden fraccional, no obstante la técnica solo es válida para cierto tipo de ecuaciones diferenciales.

# Abstract

The resolution of differential equations of fractional order has aroused great interest in recent years in mathematics, physics, chemistry and engineering because it allows to establish mathematical models for real-world problems. This study describes and analyzes the proposed method Rida and Arafa for the resolution of linear homogeneous differential equations and the method proposed by YanQuin for the resolution of linear and nonlinear homogeneous partial differential equations; these methods build a solution in power series through the Mittag-Leffler function defined for a positive real variable. The reliability of the two methods was verified by making the graphs of the established solution, varying the parameters ( $\alpha$  and coefficient) to determine if the solution in power series converges to an exact solution, additionally, the solution in power series was compared for  $\alpha = 1$  with the analytical solution when the differential equation is of integer order. Finally, some examples were solved with other solution techniques to compare the solutions obtained with the method of the Mittag-Leffler function. This method is efficient and powerful to solve differential equations of fractional order, however the technique is only valid for certain types of differential equations.

# Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Generalidades . . . . .	1
1.2. Preliminares . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	3
1.3.1. General . . . . .	3
1.3.2. Específicos . . . . .	3
1.4. Justificación . . . . .	3
1.4.1. Planteamiento del problema . . . . .	4
1.5. Metodología . . . . .	4
<b>2. Generalidades del cálculo fraccional</b>	<b>6</b>
2.1. Reseña historica . . . . .	6
2.2. Conceptos previos . . . . .	8
2.2.1. Derivada iterada . . . . .	8
2.2.2. Integral iterada . . . . .	9
2.3. Función Gamma de Euler . . . . .	14
2.4. Integral fraccional de Riemann-Liouville . . . . .	17
2.5. Derivada Fraccional . . . . .	19
<b>3. Método de la función Mittag-Leffler</b>	<b>21</b>
3.1. Función Mittag-Leffler . . . . .	21
3.2. Cálculo fraccional . . . . .	22
3.3. Análisis del método . . . . .	24
3.4. Aplicaciones y resultados . . . . .	26
3.5. Análisis de resultados . . . . .	33
<b>4. Método de la función Mittag-Leffler para ecuaciones diferenciales parciales homogéneas y sus aplicaciones</b>	<b>35</b>
4.1. Descripción del método para ecuaciones diferenciales parciales homogéneas .	36
4.2. Aplicaciones . . . . .	37
<b>5. Aplicación de otros métodos en la solución de casos aplicados</b>	<b>50</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Generalidades

Uno de los campos de interés del *Cálculo Fraccional* es la resolución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. En los últimos años ha despertado un gran interés en la matemática, física, química e ingeniería [18, 10], debido a que permite establecer modelos matemáticos de problemas del mundo real.

La función Mittag-Leffler es una generalización de la función exponencial [20] que ha demostrado su importancia como solución en integrales y derivadas de orden fraccionario. Por lo tanto, se ha convertido en un elemento importante para el cálculo fraccional [16], y ha sido empleada en métodos propuestos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias [18] y parciales homogéneas [10].

En el trabajo se aplicaron los métodos propuestos por Rida y Arafa [18] y YanQuin et al. [10], los cuales construyen una nueva solución en series de potencias por medio de la función Mittag-Leffler, la cual se define para una variable real positiva. En resumen estas técnicas anteriormente nombradas, usan la función y las derivadas para reemplazarla respectivamente en la ecuación diferencial, se combinan los términos equivalentes, se comparan los coeficientes con potencias idénticas, se obtiene el coeficiente indeterminado, y finalmente se halla la solución general. Es importante destacar que se utiliza la derivada en el sentido de Caputo, ya que esta derivada tiene la ventaja de definir las condiciones iniciales de orden entero para ecuaciones diferenciales de orden fraccional [18].

Se aplicó el método para la solución de ejemplos y aplicaciones en física; adicionalmente se comprobó la confiabilidad del método de forma gráfica empleando Matlab, para ello se incluyó la solución establecida y se varían los parámetros (coeficiente indeterminado y  $\alpha$ ), con el fin de determinar si las series de potencias convergen a una solución exacta. No obstante, este método se encuentra limitado para cierto tipo de ecuaciones diferenciales.

## 1.2. Preliminares

En el cálculo fraccional, existe una gran variedad de métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. En los últimos años se ha venido estudiando sobre una nueva técnica, la cual ha demostrado ser eficiente en determinar la solución de estas. Se utilizan dos técnicas muy similares en este trabajo, para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. El primer método es el desarrollado por Rida y Arafa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias [18], y la técnica de YanQuin et al., para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales homogéneas [10].

La introducción al cálculo fraccionario se aborda en el segundo capítulo, en el cual se hace un breve resumen histórico de los aportes que han realizado los matemáticos durante 300 años [14]. También se explica la derivada, integral iterada y la función Gamma que son tan importantes para el cálculo fraccional, se finaliza explicando la integral y derivada de Riemann-Liouville [17].

En el tercer capítulo se explica la derivada en el sentido de Caputo, esta derivada es muy útil con respecto a las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, ya que tiene la ventaja de poder utilizar las condiciones iniciales de orden entero para ecuaciones diferenciales fraccionarias. También se realiza la explicación de la función Mittag-Leffler que es la generalización directa de la función exponencial y es fundamental para el desarrollo de las dos técnicas. Es importante aclarar que esta función no se trabaja con los números complejos, sino que se adapta para trabajar con dominio en los reales y finalmente se explica detalladamente la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando la función. [18].

En el cuarto capítulo se explica el método para ecuaciones diferenciales parciales homogéneas, esta técnica es muy similar a la primera, pero con esta se puede resolver problemas de valor inicial; sin embargo se debe cumplir con ciertas condiciones y que su solución se pueda expresar como una serie de potencias para que el método sea válido. Los ejemplos resueltos en este capítulo son aplicados a fenómenos físicos (ecuación diferencial de calor, difusión, parabólica, transporte, ecuación diferencial no lineal de difusión y ecuación diferencial de onda) [10, 4].

Los problemas desarrollados en los capítulos 4 y 5, sus soluciones expresadas en serie de potencias se comprobaron realizando las gráficas en Matlab y se observó que las soluciones convergen a una solución exacta variando los parámetros (coeficiente indeterminado y  $\alpha$ ); también se concluyó que al sustituir  $\alpha = 1$ , la función solución tiende a la solución exacta cuando la ecuación diferencial es de orden entero.

En el último capítulo se realizaron por medio del método de Laplace y el método iterativo algunos ejemplos de los capítulos anteriores y se verificó que la solución con otros métodos es igual a la solución que arroja el método de la función Mittag-Leffler [4].

Con este trabajo se pretende dar a conocer los nuevos métodos desarrollados para la resolución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, los cuales han demostrado ser métodos sencillos, técnicas eficientes y poderosas [18, 10].

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. General

Aplicar el método de la función Mittag-Leffler en la resolución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario con condiciones iniciales.

### 1.3.2. Específicos

- Describir el método de la función Mittag-Leffler para ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.
- Mostrar la precisión del método de la función Mittag-Leffler aplicado a modelos de orden fraccionario.
- Comprobar la solución que se obtiene en serie de potencias, realizando las respectivas gráficas en Matlab variando los parámetros (coeficiente indeterminado y  $\alpha$ ).
- Comparar la función solución en serie de potencias cuando  $\alpha = 1$ , con la solución de la ecuación diferencial cuando es de orden entero.
- Probar la confiabilidad del método, comprobando algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario con otras técnicas de solución.

## 1.4. Justificación

En las últimas décadas el cálculo fraccional y específicamente en el campo de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, ha despertado gran interés en los matemáticos y físicos, debido a que se puede modelar fenómenos físicos-matemáticos reales [10, 4]. Hasta la actualidad existe gran variedad de métodos para resolver estas ecuaciones, pero en los últimos años se ha desarrollado métodos que han demostrado ser eficientes y sencillos para desarrollar cierto tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales de orden fraccional que utilizan la función Mittag-Leffler [18, 10] por lo tanto la solución se expresa en series de potencias.

Para comprender este nuevo método, se realizó una búsqueda exhaustiva de métodos similares para entender mejor la técnica y no solo para ecuaciones diferenciales ordinarias, sino para ecuaciones diferenciales parciales. También se comprobó la función solución en



Matlab, comparando la solución en series de potencia cuando  $\alpha = 1$  con la solución cuando la ecuación diferencial es de orden entero y después se probaron las soluciones con otro método diferente [4].

El método generalizado de la función Mittag-Leffler es incipiente, y por tal motivo es importante dar a conocer a la comunidad académica técnicas nuevas, efectivas y sencillas, que puedan contribuir a investigaciones futuras.

Estos nuevos métodos desarrollados por Rida y Arafa (2011) y YanQuin et al. (2017), se explicaron detalladamente, con ejemplos y gráficos que demostraron la efectividad de esta poderosa técnica [18].

### 1.4.1. Planteamiento del problema

Se constituye como un objetivo principal de esta propuesta de grado el presentar una descripción y análisis del método de la función Mittag-Leffler para resolver ecuaciones diferenciales de orden fraccional y modelos físicos matemáticos con condiciones iniciales, cuya solución es aplicable a problemas de ingeniería.

Cabe resaltar que el método es nuevo, razón por la cual este trabajo sería una gran oportunidad para ser presentado en profundidad a nuestra comunidad académica Colombiana y que sirva como soporte para futuras investigaciones en la búsqueda de soluciones a problemas que surgen de las ciencias en general

## 1.5. Metodología

La primera etapa correspondió a un barrido bibliográfico a través de los diferentes trabajos de investigación que se encuentran disponibles en medio digital, donde se buscó el origen, las generalidades, descripción del método y su aplicación a las ecuaciones diferenciales de orden fraccional. Con esa información logramos avanzar en la resolución de diferentes modelos físicos-matemáticos.

Una vez se dominó el método de la función Mittag-Leffler, se avanzó a la segunda etapa, la cual consistió en la búsqueda de nuevos documentos a través de la red especializada en resolver modelos físicos-matemáticos con el método propuesto en este trabajo. A través de la etapa anterior se consultaron documentos físicos sobre temas de resolución de ecuaciones diferenciales de orden entero por métodos analíticos.

La tercera etapa consistió en realizar las gráficas en Matlab para cada una de la soluciones de los ejemplos y modelos físicos-matemáticos y de las cuales se varió el orden de la derivada y el coeficiente para verificar que al cambiar los parámetros a variables enteras converge a una solución exacta.

La cuarta etapa consistió en investigar otras técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales de orden fraccional, para realizar comparativos con el método de la función Mittag- Leffler, y comprobar la eficacia de esta técnica.

La quinta etapa consistió en consultar a investigadores, principalmente aquellos relacionados con la línea de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones con el fin de analizar las soluciones encontradas mediante este método.

Finalmente la sexta etapa consistió en la elaboración del último borrador y su revisión previa antes de la elaboración del documento final por parte del director.

# Capítulo 2

## Generalidades del cálculo fraccional

### 2.1. Reseña historica

El cálculo fraccional es una disciplina matemática de 300 años de antigüedad. Después de la publicación sobre cálculo diferencial en donde se introdujo la notación  $\frac{d^n y}{dx^n}$ , Leibnitz recibió una carta de Bernoulli haciéndole una pregunta sobre el significado de la derivada de orden no entera, también recibió una consulta similar de L'Hôpital: ¿Qué sucede si  $n$  es  $\frac{1}{2}$ ?, la repuesta de Leibnitz fue profética: Conducirá a una paradoja, una paradoja de la cual algún día se sacarán consecuencias útiles, porque no hay paradojas inútiles. Fue el comienzo de una discusión sobre el tema que involucró a otros matemáticos como Euler y Fourier [14].

Euler sugirió en 1730 una generalización de la regla utilizada para calcular la derivada de la función potencia y la usó para obtener derivadas de orden  $\frac{1}{2}$ . Sin embargo, podemos decir que el siglo XVIII no fue fructuoso en lo que concierne al desarrollo del cálculo fraccionario. Recién a comienzos del siglo XIX, se empezaron a generar desarrollos interesantes, Laplace propuso una formulación integral (1812), pero fue Lacroix quien usó por primera vez la designación “derivada del orden arbitrario”(1819). Usando la función gamma pudo definir la derivada fraccionaria de la función potencia. En 1822, Fourier presentó la siguiente generalización:

$$\frac{d^\nu f(t)}{dt^\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu \cos(ut - u\tau + \nu\pi/2) du,$$

y declaró que era válido para cualquier  $\nu$ , positivo o negativo. Sin embargo, podemos hacer referencia los trabajos de Liouville y Abel. Abel resolvió la ecuación integral que aparece en la solución del problema tautócrona [14]:

$$\int_a^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^\mu} d\tau = f(t), \quad t > a, \quad 0 < \mu < 1$$

Liouville hizo varios intentos en 1832. En el primero tomó las exponenciales como punto de partida para introducir la derivada fraccional. En otro intento presentó una fórmula para la integración:

$$D^{-p}\varphi(t) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty \varphi(t+\tau) \tau^{p-1} d\tau, \quad -\infty < t < +\infty, \quad \operatorname{Re}(p) > 0,$$

donde  $\Gamma(p)$  es la función gamma. A esta integral, le damos el nombre de la integral fraccional de Liouville. En un artículo publicado en 1892 (después de su muerte) Riemann alcanzó una expresión similar a la integral fraccional [14].

$$D^{-\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > 0,$$

esta se convirtió en la base más importante para la integración fraccional. Conviene decir que tanto Liouville como Riemann abordaron las funciones llamadas “complementarias” que aparecerían al tratar la derivada de orden  $\alpha$  como una integración de orden  $-\alpha$  [18].

Existen varios enfoques para la generalización de la noción de la derivada de orden fraccional, por ejemplo, el enfoque de funciones generalizadas de Riemann-Liouville, Grünwaldwald, Caputo. La derivada fraccional de Riemann-Liouville es utilizada principalmente por matemáticos, pero este enfoque no es adecuado para problemas físicos del mundo real ya que requiere la definición de condiciones iniciales de orden fraccional, que aún no tienen una explicación físicamente significativa. Caputo introdujo una definición alternativa, que tiene la ventaja de definir las condiciones iniciales de orden entero para ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. A diferencia del enfoque de Riemann-Liouville, que deriva su definición de la integración repetida, la formulación de Grünwaldwald-Letnikov aborda el problema desde el lado de la derivada. Este enfoque se usa principalmente en algoritmos numéricos. Las principales ventajas del enfoque de Caputo son las condiciones iniciales para las ecuaciones diferenciales fraccionarias, tomando la misma forma que para las ecuaciones diferenciales de orden entero [18].

En los últimos años las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, se han convertido de gran utilidad tanto para las matemáticas como para las aplicaciones. Estas ecuaciones fueron utilizadas en el modelado de muchos procesos físicos, químicos y de ingeniería. A su vez, muchos autores discutieron los aspectos matemáticos de las ecuaciones diferenciales fraccionarias y los métodos de sus soluciones: el método iterativo, el método de serie, la técnica de transformada de Fourier, métodos especiales para ecuaciones diferenciales de orden racional y la técnica de transformada de Laplace. Recientemente, se han desarrollado varios métodos matemáticos que incluyen el método de descomposición de Adomian y método de iteración variacional, para obtener las soluciones analíticas exactas y aproximadas. Algunos de estos métodos usan la transformada para reducir ecuaciones en ecuaciones más simples o sistemas de ecuaciones, y algunos otros métodos dan la solución en una forma de serie que converge a la solución exacta [18, 10].

Se ha desarrollado un nuevo método de la función Mittag-Leffler para resolver ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionarias. Este sugiere que el término lineal  $y(x)$  se descomponga mediante una serie infinita de componentes y por lo tanto para resolver las ecuaciones diferenciales de orden fraccional se desarrollará por medio de la derivada en el

sentido de Caputo, esta derivada tiene la ventaja de definir las condiciones iniciales de orden entero para ecuaciones diferenciales de orden fraccional. Esta técnica utiliza como base la función Mittag-Leffler y sus derivadas en el sentido de Caputo. El método ha demostrado ser muy poderoso y eficiente en la búsqueda de soluciones analíticas para una gran clase de ecuaciones diferenciales de orden fraccional [18, 10].

## 2.2. Conceptos previos

Para ahondar en los temas de derivada e integral fraccional se debe de tener claro los conceptos de derivada e integral iterada [17].

### 2.2.1. Derivada iterada

Si tenemos una función  $f(x)$  y se le aplica  $n$ -veces la función compuesta sobre sí misma, tenemos [17]:

Para  $n = 0$

$$f^0(x) = x$$

$n = 1$

$$f^1(x) = f(x)$$

$n = 2$

$$f^2(x) = f(x) \circ f(x) = f(f(x))$$

$n = 3$

$$f^3(x) = f(x) \circ f(x) \circ f(x) = f(f(f(x)))$$

Para  $n$

$$f^n(x) = f(x) \circ f(x) \circ \cdots \circ f(x) = f(f(\cdots f(x)) \cdots)$$

Siguiendo la misma lógica explicaremos la derivada iterada. Así tenemos:

Para  $n = 0$

$$D^0 f(x) = \frac{d^0}{dx^0} f(x) = f^{(0)}(x) = f(x)$$

Para  $n = 1$

$$D^1 f(x) = \frac{d^1}{dx^1} f(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f^{(1)}(x) = f'(x)$$

Para  $n = 2$

$$D^2 f(x) = D[Df(x)] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{d}{dx} f(x) \right] = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f^{(2)}(x)$$

Para  $n = 3$

$$D^3 f(x) = D[D[Df(x)]] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{d}{dx} \left[ \frac{d}{dx} f(x) \right] \right] = \frac{d^3}{dx^3} f(x) = f^{(3)}(x)$$

Para  $n$

$$D^n f(x) = D[D \cdots [Df(x)] \cdots] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{d}{dx} \cdots \left[ \frac{d}{dx} f(x) \right] \cdots \right] = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) \quad (2.1)$$

### 2.2.2. Integral iterada

Una integral iterada es una integral evaluada múltiples veces sobre una misma variable (en contraste con una integral múltiple, que consiste en un número de integrales evaluadas con respecto a diferentes variables).

La integral iterada la podemos definir de la siguiente forma:

**Definición 2.2.2.1** Dada una función  $f(x)$ , con  $x > 0$ , se puede definir la integral indefinida de  $f$  entre  $[0, x]$ , y la denotamos  $Jf(x)$  ó  $D^{-1}f(x)$  [17], por lo tanto:

$$D^{-1}f(x) = Jf(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (2.2)$$

Para  $n = 2$

$$D^{-2}f(x) = J^2 f(x)$$

Sabemos que

$$Jf(x) = \int_x^0 f(t) dt,$$

Así

$$D^{-2}f(x) = J^2 f(x) = J[Jf(x)] = \int_0^x Jf(t) dt = \int_0^x \int_0^t f(s) ds dt$$

Para  $n = 3$

$$D^{-3}f(x) = J^3f(x) = J^2[Jf(x)].$$

Sabemos que

$$J^2f(x) = \int_0^x \left[ \int_0^t f(s) ds \right] dt.$$

Luego

$$D^{-3}f(x) = J^3f(x) = \int_0^x \left[ \int_0^t Jf(s) ds \right] dt = \int_0^x \left[ \int_0^t \left[ \int_0^s f(u) du \right] ds \right] dt$$

El anterior procedimiento se puede realizar  $n$ -veces, existe un resultado de Cauchy que generaliza este resultado y se le conoce como la fórmula para integrales iteradas.

$$D^{-n}f(x) = J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (2.3)$$

Verifiquemos para  $n = 1$

$$D^{-1}f(x) = Jf(x) = \frac{1}{0!} \int_0^x (x-t)^0 f(t) dt = \int_0^x f(t) dt.$$

Obtenemos la definición dada por la ecuación (2.2)

Para  $n = 2$

$$D^{-2}f(x) = J^2f(x) = \frac{1}{1!} \int_0^x (x-t)f(t) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt.$$

Sea  $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$ , lo que se desea probar es  $g(x) = J^2f(x)$ . Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x (x-t)f(t) dt = \int_0^x [xf(t) - tf(t)] dt \\ &= x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt \end{aligned}$$

La expresión anterior la derivamos con respecto a  $x$ .

$$g'(x) = \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x).$$

Sabemos que

$$D^{-1}f(x) = Jf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Por lo tanto

$$g'(x) = \int_0^x f(t) dt = Jf(x).$$

Se escribe  $g(x)$  como:

$$g(x) = \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x Jf(x) = J[Jf(x)] = J^2 f(x) = D^{-2} f(x)$$

Finalmente obtenemos

$$D^{-2} f(x) = J^2 f(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

□

Ahora realizaremos la demostración para  $n$

Sea

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (2.4)$$

Primero resolvemos el término  $(x-t)^{n-1}$  con el teorema del binomio

$$(x-t)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} (-t)^k,$$

Así

$$\begin{aligned} (x-t)^{n-1} &= \binom{n-1}{0} x^{n-1} - \binom{n-1}{1} x^{n-2} t + \binom{n-1}{2} x^{n-3} t^2 + \dots \pm \binom{n-1}{n-1} x^{(n-1)-(n-1)} t^{n-1} \\ &= x^{n-1} - \binom{n-1}{1} x^{n-2} t + \binom{n-1}{2} x^{n-3} t^2 + \dots \pm t^{n-1}. \end{aligned}$$

Después de resolver la expresión  $(x-t)^{n-1}$ , este resultado lo reemplazamos en  $g(x)$  y multiplicamos  $f(t)dt$  por cada término

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \int_0^x x^{n-1} f(t) dt - \int_0^x \binom{n-1}{1} x^{n-2} t f(t) dt + \dots + \int_0^x (-t)^{n-1} f(t) dt \right],$$

O lo que es lo mismo,

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left[ x^{n-1} \int_0^x f(t) dt - \binom{n-1}{1} x^{n-2} \int_0^x t f(t) dt + \dots + \int_0^x t^{n-1} f(t) dt \right]$$



Ahora derivando con respecto a  $x$ , tenemos

$$g'(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left[ (n-1)x^{n-2} \int_0^x f(t)dt + x^{n-1}f(x) \right. \\ \left. - \binom{n-1}{1} \left[ (n-2)x^{n-3} \int_0^x tf(t)dt + x^{n-2}xf(x) \right] + \dots \pm [x^{n-1}f(x)] \right]$$

Se cancelan los términos que tengan como expresión  $x^{n-1}f(x)$  esto sucede debido a que el binomio  $(x-t)^{n-1}$  de la ecuación (2.4) es una diferencia y por lo tanto al resolverlo se cancelan los términos semejantes.

Utilizando el binomio de Newton, tenemos:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} - \binom{n}{n} b^n.$$

Si tomamos los coeficientes de la expresión anterior, observamos que estos se cancelan cuando el binomio  $(a-b)^n$ ,

$$\frac{n!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} + \dots + \frac{n!}{(n-1)!} - \frac{n!}{n!} = 0.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, volvemos a escribir  $g'(x)$  y obtener

$$g'(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left[ (n-1)x^{n-2} \int_0^x f(t)dt + \cancel{x^{n-1}f(x)} - \binom{n-1}{1} (n-2)x^{n-3} \int_0^x tf(t)dt \right. \\ \left. - \binom{n-1}{1} \cancel{x^{n-1}f(x)} + \binom{n-1}{2} (n-3)x^{n-4} \int_0^x t^2 f(t)dt + \binom{n-1}{2} \cancel{x^{n-1}f(x)} - \dots \pm \cancel{x^{n-1}f(x)} \right].$$

$$g'(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \binom{n-1}{0} (n-1)x^{n-2} \int_0^x f(t)dt - \binom{n-1}{1} (n-2)x^{n-3} \int_0^x tf(t)dt \right. \\ \left. + \binom{n-1}{2} (n-3)x^{n-4} \int_0^x t^2 f(t)dt + \dots \pm \binom{n-1}{n-2} \int_0^x t^{n-2} f(t)dt \right].$$

Resolviendo la combinatoria, tenemos

$$g'(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left[ (n-1)x^{n-2} \int_0^x f(t)dt - \left( \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \right) (n-2)x^{n-3} \int_0^x tf(t)dt \right. \\ \left. + \left( \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} \right) (n-3)x^{n-4} \int_0^x t^2 f(t)dt + \dots \pm \left( \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \right) \int_0^x t^{n-2} f(t)dt \right].$$

$$g'(x) = \frac{n-1}{(n-1)!} \left[ x^{n-2} \int_0^x f(t)dt - \left( \frac{(n-2)!(n-2)}{(n-3)!(n-2)} \right) \int_0^x x^{n-3}t f(t) \right. \\ \left. + \left( \frac{(n-2)!(n-3)}{2!(n-4)!(n-3)} \right) \int_0^x x^{n-4}t^2 f(t)dt \right] + \dots \pm \left( \frac{(n-2)!}{(n-2)!} \int_x^0 t^{n-2} f(t)dt \right).$$

$$g'(x) = \frac{n-1}{(n-1)!} \left[ \int_0^x x^{n-2} f(t)dt - \frac{(n-2)!}{(n-3)!} \int_0^x x^{n-3}t f(t) \right. \\ \left. + \left( \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \right) \int_0^x x^{n-4}t^2 f(t)dt + \dots \pm \int_0^x t^{n-2} f(t)dt \right]$$

Tenemos que los coeficientes de cada uno de los términos corresponden a las siguientes combinatorias.

$$\frac{(n-2)!}{0!(n-2)!} = 1 = \binom{n-2}{0}$$

$$\frac{(n-2)!}{1!(n-3)!} = \binom{n-2}{1}$$

$$\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} = \binom{n-2}{2}$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-2)!0!} = 1 = \binom{n-2}{n-2}$$

Por lo tanto,

$$g'(x) = \frac{n-1}{(n-1)!} \left[ \binom{n-2}{0} \int_0^x x^{n-2} f(t)dt - \binom{n-2}{1} \int_0^x x^{n-3}t f(t)dt \right. \\ \left. + \binom{n-2}{2} \int_0^x x^{n-4}t^2 f(t)dt - \dots \pm \binom{n-2}{n-2} \int_0^x t^{n-2} f(t)dt \right].$$

La expresión entre el corchete es igual a  $(x-t)^{n-2}f(t)dt$ , entonces tenemos que:

$$g'(x) = \frac{n-1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-2} f(t)dt = g'(x) = \frac{(n-1)}{(n-2)!(n-1)} \int_0^x (x-t)^{n-2} f(t)dt \\ = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x (x-t)^{n-2} f(t)dt$$

Podemos escribir  $g(x)$  como:

$$g(x) = \int_0^x g'(t)dt = \int_0^x J^{n-1}f(x) = J[J^{n-1}f(x)] = J^n f(x) = D^{-n}f(x)$$

Finalmente se obtuvo que

$$D^{-n}f(x) = J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

## 2.3. Función Gamma de Euler

**Definición 2.3.1** La función Gamma de Euler,  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow R$ , está definida por [17]:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

**Proposición 2.3.1** La integral  $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  es convergente para  $x > 0$ .

*Demostración:* Dividimos la integral en la suma de dos integrales para demostrar la convergencia de la función Gamma cuando  $x > 0$ :

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Para la primera integral  $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ , se tiene que  $0 < t < 1$ , entonces  $0 < e^{-t} < 1$ , luego se puede acotar así:  $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt < \int_0^1 t^{x-1} dt$ .

Si  $x > 0$  se procede a buscar la convergencia de la integral que acota:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1} dt &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 t^{x-1} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left. \frac{t^x}{x} \right|_a^1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{a^x}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{0^x}{x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

De modo que para todo valor de  $x > 0$ , la integral  $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$  converge.

Para la segunda integral  $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ , es necesario contemplar dos casos.

*Caso 1:* Para valores  $0 < x \leq 1$

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_1^\infty e^{-t} t^{-(1-x)} dt = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} dt$$

El intervalo de integración es  $[1, \infty)$  por lo tanto  $t \geq 1$ , si tomamos a  $0 < x \leq 1$  entonces  $f(t) = t^{1-x}$  se comporta como una función creciente. Podemos observar en la Figura 2.1 que  $t^{1-x} \geq 1$  entonces  $\frac{1}{t^{1-x}} \leq 1$ .

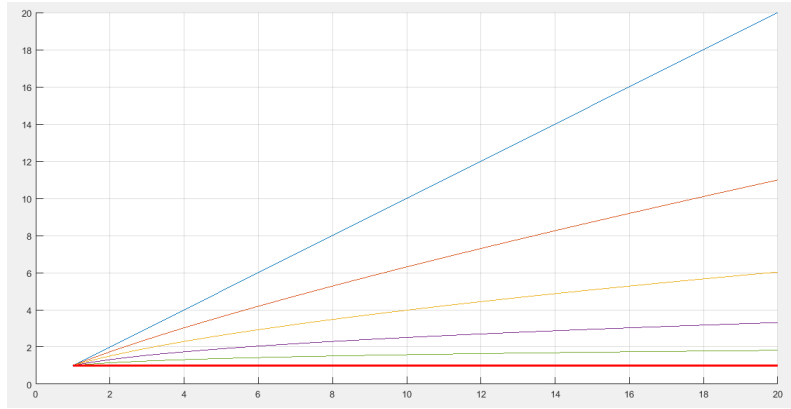


Figura 2.1:  $f(t) = t^{1-x}$  para  $t > 1$  y  $0 < x \leq 1$ .

Por lo tanto la integral se acota de la siguiente forma:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} dt \leq \int_1^\infty e^{-t} dt$$

$$\int_1^\infty e^{-t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a e^{-t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} (-e^{-a} + e^{-1}) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \cancel{\frac{1}{e^a}}^0 + \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e}$$

De modo que para  $0 < x \leq 1$ , la integral  $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  converge.

*Caso 2:* Para valores de  $x > 1$ .

Se usa integración por partes, donde:

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = -e^{-t} t^{x-1} - \int_1^\infty -e^{-t} (x-1) t^{x-2} dt = -\frac{t^{x-1}}{e^t} + (x-1) \int_1^\infty e^{-t} t^{x-2} dt$$

Ahora se procede a buscar la convergencia de la integral:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left. -\frac{t^{x-1}}{e^t} \right|_1^a + (x-1) \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a e^{-t} t^{x-2} dt =$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left( -\frac{a^{x-1}}{e^a} + \frac{1}{e} \right) + (x-1) \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{t^{x-2}}{e^t} dt \quad (2.5)$$

Para demostrar que  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^{x-1}}{e^a} = 0$ , con  $x > 1$  para ello se usa la regla de L'Hopital, sabiendo que  $n = [x]$  realizamos la n-ésima derivada:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(x-n)(x-n+1) \dots (x-2)(x-1)a^{x-n-1}}{e^a} = \frac{0}{\infty} = 0$$

De acuerdo a lo anterior  $a^{x-n-1} \rightarrow 0$ , como  $n = [x]$ ,  $0 \leq x-n < 1$ , luego  $x-n-1 < 0$ , por lo tanto cuando  $a \rightarrow \infty$  y como su exponente es negativo, la expresión queda:

$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a^y} = 0$ , donde  $y = |x-n-1| > 0$  ahora como el numerador tiende a cero y el denominador crece exponencialmente, el límite tiende a cero  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^{x-1}}{e^a} = 0$ .

Se aplica este resultado para demostrar la convergencia de la integral (2.5) :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left( \cancel{-\frac{a^{x-1}}{e^a}}^0 + \frac{1}{e} \right) + (x-1) \int_1^\infty \frac{t^{x-2}}{e^t} dt = \frac{1}{e} + (x-1) \int_1^\infty \frac{t^{x-2}}{e^t} dt$$

Se puede repetir sucesivamente el proceso hasta demostrar que la integral  $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  con  $x > 1$  converge.

Una propiedad importante de la función Gamma es la siguiente:

**Propiedad 2.3.1:**  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

Para demostrarlo se inicia con  $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt$

Resolvemos la integral

$$\Gamma(x+1) = -e^{-t}t^x \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}xt^{x-1}dt = x \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x)$$

De modo que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

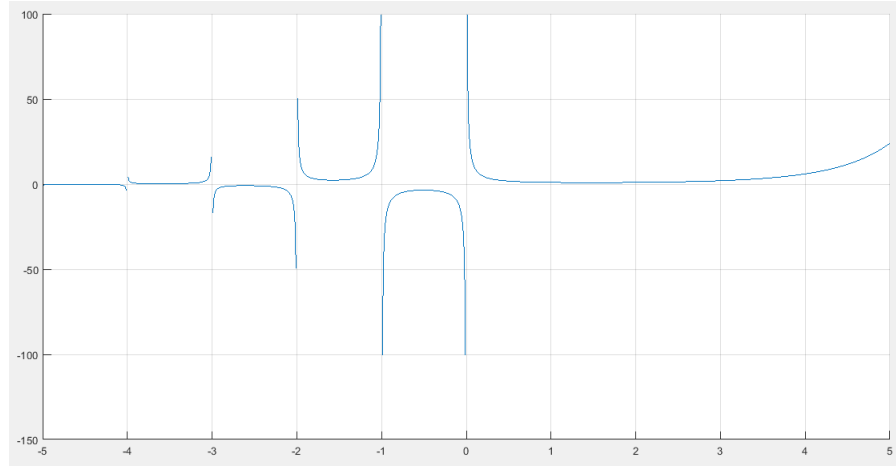


Figura 2.2: Función Gamma de Euler

## 2.4. Integral fraccional de Riemann-Liouville

En el cálculo fraccional es conveniente explicar primero la integral fraccional y después la derivada fraccional [17, 16].

De la formula para integrales iteradas, tenemos

$$D^{-n}f(x) = J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Reemplazamos a  $n$  por  $v$ , donde  $v \in R^+$  y aplicando una de las propiedades de la función Gamma, observamos que:

Si  $\Gamma(n+1) = n!$ , entonces  $\Gamma(n) = (n-1)!$

Tenemos que

$$D^{-v} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} dt. \quad (2.6)$$

A esta integral se le conoce con el nombre de integral fraccional de Riemann-Liouville de  $f$  de orden  $v \in R$ . La función  $f$  debe ser continua en un intervalo de  $(0, \infty)$  e integrable en un subintervalo finito  $[0, \infty)$ .

Para una función de la forma  $x^\mu$ , podemos hallar la integral (2.6) usando la función beta.

Sea  $f(x) = x^\mu$  con  $\mu > -1$ , haremos un cambio de variable  $t = x\tau$  y derivamos con respecto a  $\tau$

Los límites de integración son:

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow \tau = 0 \\ t = x &\Rightarrow \tau = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{-v} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t) dt \\ D^{-v} x^\mu &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} t^\mu dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^1 (x-x\tau)^{v-1} (x\tau)^\mu x d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^1 x^{v-1} (1-\tau)^{v-1} (x\tau)^\mu x d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^1 \frac{x^v}{x} (1-\tau)^{v-1} x^\mu \tau^\mu x d\tau \\ &= \frac{x^{v+\mu}}{\Gamma(v)} \int_0^1 \tau^\mu (1-\tau)^{v-1} d\tau \end{aligned}$$

Hacemos uso de la función Beta para reemplazarla en la expresión anterior.

$$\beta(m, n) = \int_0^1 \tau^{m-1} (1-\tau)^{n-1} d\tau$$

Para este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} \beta(\mu+1, v) &= \int_0^1 \tau^{(\mu+1)-1} (1-\tau)^{v-1} d\tau \\ &= \int_0^1 \tau^\mu (1-\tau)^{v-1} d\tau \end{aligned}$$

Reemplazando

$$D^{-v}x^\mu = \frac{x^{v+\mu}\beta(\mu+1, v)}{\Gamma(v)} \quad (2.7)$$

De las propiedades de la función beta, sabemos que:

$$\beta(\mu+1, v) = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(v)}{\Gamma(\mu+v+1)} \quad (2.8)$$

Reemplazando (2.8) en (2.7), tenemos,

$$\begin{aligned} D^{-v}x^\mu &= \frac{\Gamma(\mu+1)\cancel{\Gamma(v)}}{\cancel{\Gamma(v)}\Gamma(\mu+v+1)}x^{v+\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)}x^{v+\mu} \end{aligned}$$

La anterior solución es la integral fraccional de la función  $x^\mu$ , con  $\mu > -1$

## 2.5. Derivada Fraccional

Si  $D = \frac{d}{dx}$  es el operador derivada, y si  $n$  es un entero positivo,  $D^n f(x)$  es la derivada  $n$ -ésima. Si  $n$  no es un entero positivo y se conoce la importancia de  $D^{-v}$ , se define a  $D^\mu$  como la derivada fraccional cuando  $\mu \in R^+$ . [17, 16].

Tenemos que  $u \in R^+$ ,  $n$  es el entero más pequeño mayor que  $u$  y sea  $v = n - u$ , entonces  $0 < v \leq 1$ , donde  $v \in R$ .  $D^\mu$  se define como la derivada fraccional de  $f(x)$  de orden  $u$ , así:

Sabemos que  $u = n - v$

$$D^u f(x) = D^{n-v} f(x) = D^n [D^{-v} f(x)] \quad , \quad x > 0$$

Si se tiene  $f(x) = x^\mu$ , entonces  $D^u x^\mu = D^n [D^{-v} x^\mu]$  y usando la integral de Riemann-Liouville

$$D^{-v}x^\mu = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} t^\mu dt$$

Tomando el resultado de la sección anterior, tenemos

$$D^{-v}x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)}x^{v+\mu}$$



Tenemos,

$$\begin{aligned}
D^u x^\mu &= D^{n-v} x^\mu = D^n [D^{-v} x^\mu] = D^n \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)} x^{v+\mu} \\
D^u x^\mu &= D^n \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n-u+\mu+1)} x^{n-u+\mu} \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n-u+\mu+1)} x^{n-u+\mu} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)(n-u+\mu)(n-u+\mu-1)\dots(n-u+\mu-(n-1))x^{\mu-u}}{\Gamma(n-u+\mu+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)(n-u+\mu)(n-u+\mu-1)\dots(\mu-u+1)x^{\mu-u}}{\Gamma(n-u+\mu+1)} \frac{\Gamma(\mu-u+1)}{\Gamma(\mu-u+1)} \\
D^u x^\mu &= \frac{\Gamma(\mu+1)\cancel{\Gamma(n-u+\mu+1)}}{\cancel{\Gamma(n-u+\mu+1)}\Gamma(\mu-u+1)} x^{\mu-u} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-u+1)} x^{\mu-u}
\end{aligned}$$

En conclusión, tenemos la derivada fraccional de  $x^\mu$

$$D^u x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-u+1)} x^{\mu-u}, \quad u > 0, x > 0$$

## Capítulo 3

# Método de la función Mittag-Leffler

### 3.1. Función Mittag-Leffler

La función  $E_\alpha(z)$  fue definida y estudiada por Mittag-Leffler en 1903. Es una generalización directa de la función exponencial. La función generalizada fue estudiada por Wiman en 1905, Agarwal en 1953 y Humbert y Agarwal en 1953, y otros.

$E_\alpha(x)$  : Función Mittag-Leffler [18, 11].

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha \in C, \quad Re(\alpha) > 0)$$

$E_{\alpha,\beta}(x)$  : Función Mittag-Leffler generalizada.

$$E_{\alpha\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha, \beta \in C, \quad Re(\alpha) > 0, \quad Re(\beta) > 0)$$

**Ejemplo 1.** Comprobemos que  $E_1(z) = e^z$

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

**Ejemplo 2.** Probemos que  $E_{1,1}(z) = e^z$

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

### 3.2. Cálculo fraccional

Derivada fraccional de  $f(x)$  en el sentido de Caputo [18, 16].

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= I^{m-\alpha} D^m f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \end{aligned} \quad (3.1)$$

Supongamos que  $\alpha \in R^+$ , sea  $m$  el entero más pequeño, mayor que  $\alpha$  y sea  $u = m - \alpha$ , entonces  $0 < u \leq 1$ , donde  $u \in R^+$ .

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= D^{-u+m} f(x) \\ &= D^{-u} [D^m f(x)] \\ &= I^u D^m f(x) \\ &= I^{m-\alpha} D^m f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \end{aligned}$$

Sabemos que  $0 < u \leq 1$  por lo tanto  $m-1 < \alpha \leq m$ ,  $m \in N$ ,  $x > 0$

Para la derivada en el sentido de Caputo tenemos  $D^\alpha C = 0$ , siendo  $C$  una constante.

La derivada en el sentido de Caputo para  $x^n$  es:

$$D^\alpha x^n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \leq [\alpha] \\ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}, & \text{si } n > [\alpha] \end{cases} \quad (3.2)$$

Comprobemos lo anterior

*Caso 1:* Para  $n \leq [\alpha]$

$$D^\alpha x^n = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)} t^n dt$$

Si  $m = n$  la derivada  $f^{(m)}$  de la función  $t^n$  es:

$$\frac{d^m}{dt^m} t^n = \frac{d^m}{dt^m} t^m = m(m-1)(m-2) \dots 2 \cdot 1 = m!$$

Si  $m > n$  y  $m!$  es una constante, por lo tanto la derivada de orden  $m+1$  será igual a cero, así como las de órdenes subsiguientes.

Entonces,

$$D^\alpha x^n = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} \cancel{f^{(m)} t^n} \overset{0}{dt} = 0$$

Caso 2: Para  $n > [\alpha]$

$$D^\alpha x^n = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)} t^n dt. \quad (3.3)$$

Realizamos la derivada  $f^{(m)}$  de la función  $t^n$  cuando  $n > m$ ,

$$\frac{d^m}{dt^m} t^n = n(n-1)(n-2) \dots (n-(m-1)) t^{n-m} \frac{\Gamma(n-(m-1))}{\Gamma(n-(m-1))} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-(m-1))} t^{n-m}$$

Reemplazamos lo anterior en (3.3)

$$\begin{aligned} D^\alpha x^n &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)} t^{n-m} dt \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(n-m+1)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{n-m} dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

Se resuelve la integral de (3.4)

$$\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{n-m} dt$$

Realizamos el siguiente cambio de variable  $t = vx$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{n-m} dt &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 (x-vx)^{m-\alpha-1} (vx)^{n-m} x dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 x^{m-\alpha-1} (1-v)^{m-\alpha-1} v^{n-m} x^{n-m} x dv \\ &= \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 (1-v)^{m-\alpha-1} v^{n-m} dv \\ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{n-m} dt &= \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)} \beta(n-m+1, m-\alpha) \\ &= \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\Gamma(n-m+1)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(n-m+1+m-\alpha)} \\ &= \frac{x^{n-\alpha}\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} \end{aligned}$$

Reemplazamos el anterior resultado en (3.4)

$$D^\alpha x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)} \frac{x^{n-\alpha} \Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}$$

### 3.3. Análisis del método

Se aplicará la metodología propuesta por Rida y Arafa (2011), la cual sugiere que el término  $y(x)$  se descomponga por una serie infinita de componentes [18, 16, 8, 12]. La función Mittag-Leffler se define para el dominio de los números reales, donde  $z = ax^\alpha$ :

$$y = E_\alpha(ax^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \quad (3.5)$$

Utilizamos las siguientes resultados:

$$D^\alpha(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{x^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} \quad (3.6)$$

$$D^{2\alpha}(y) = \sum_{n=2}^{\infty} a^n \frac{x^{(n-2)\alpha}}{\Gamma((n-2)\alpha+1)} \quad (3.7)$$

Vamos a comprobar el resultado (3.6)

$$D^\alpha(y) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} dt \quad (3.8)$$

Realizamos la derivada  $f^{(m)}$

$$\begin{aligned} D^m \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n\alpha)(n\alpha-1) \dots (n\alpha-(m-1)) t^{n\alpha-m}}{\Gamma(n\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(n\alpha-(m-1))}{\Gamma(n\alpha-(m-1))} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \Gamma(n\alpha+1) t^{n\alpha-m}}{\Gamma(n\alpha+1) \Gamma(n\alpha-m+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^{n\alpha-m}}{\Gamma(n\alpha-m+1)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Reemplazamos el resultado (3.9) en la ecuación (3.8), para resolver  $D^\alpha(y)$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha(y) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^{n\alpha-m}}{\Gamma(n\alpha-m+1)} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} \frac{a^n t^{n\alpha-m}}{\Gamma(n\alpha-m+1)} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\Gamma(m-\alpha) \Gamma(n\alpha-m+1)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{n\alpha-m} dt \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Resolvamos la siguiente integral de (3.10)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{n\alpha-m} dt &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 (x-ux)^{m-\alpha-1} (ux)^{n\alpha-m} x du \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 x^{m-\alpha-1} (1-u)^{m-\alpha-1} u^{n\alpha-m} x^{n\alpha-m} x du \\
 &= \frac{x^{\alpha(n-1)}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{m-\alpha-1} u^{n\alpha-m} du \\
 &= \frac{x^{\alpha(n-1)}}{\Gamma(m-\alpha)} \beta(n\alpha-m+1, m-\alpha) \\
 &= \frac{x^{\alpha(n-1)}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\Gamma(n\alpha-m+1) \Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(n\alpha-m+1+m-\alpha)} \\
 &= \frac{x^{\alpha(n-1)} \Gamma(n\alpha-m+1)}{\Gamma(n\alpha-\alpha+1)} .
 \end{aligned}$$

Reemplazamos el anterior resultado en (3.10)

$$D^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\Gamma(n\alpha-m+1)} \cdot \frac{x^{\alpha(n-1)} \Gamma(n\alpha-m+1)}{\Gamma(n\alpha-\alpha+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{x^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} .$$

Ahora vamos a comprobar el resultado (3.7).

$$D^\alpha(y) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{t^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} dt . \quad (3.11)$$

Resolvamos la derivada  $f^{(m)}$

$$D^m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^{(n-1)\alpha-m}}{\Gamma((n-1)\alpha-m+1)} . \quad (3.12)$$

Reemplazamos el resultado (3.12) en la ecuación (3.11), para resolver  $D^\alpha(y)$

$$D^\alpha(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\Gamma(m-\alpha) \Gamma((n-1)\alpha - m + 1)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{(n-1)\alpha-m} dt \quad (3.13)$$

Realizamos la siguiente integral de (3.13)

$$\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{(n-1)\alpha-m} dt$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{(n-1)\alpha-m} dt &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 (x-ux)^{m-\alpha-1} (ux)^{(n-1)\alpha-m} x du \\ &= \frac{x^{\alpha(n-1)-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{m-\alpha-1} u^{(n-1)\alpha-m} du \\ &= \frac{x^{\alpha(n-2)}}{\Gamma(m-\alpha)} \beta((n-1)\alpha - m + 1, m - \alpha) \\ &= \frac{x^{\alpha(n-2)}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\Gamma((n-1)\alpha - m + 1) \Gamma(m - \alpha)}{\Gamma((n-1)\alpha - m + 1 + m - \alpha)} \\ &= \frac{x^{\alpha(n-2)} \Gamma((n-1)\alpha - m + 1)}{\Gamma((n-2)\alpha + 1)} \end{aligned}$$

Reemplazamos el anterior resultado en (3.13)

$$D^{2\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{\Gamma((n-1)\alpha - m + 1)} \cdot \frac{x^{\alpha(n-2)} \Gamma((n-1)\alpha - m + 1)}{\Gamma((n-2)\alpha + 1)} = \sum_{n=2}^{\infty} a^n \frac{x^{(n-2)\alpha}}{\Gamma((n-2)\alpha + 1)}$$

### 3.4. Aplicaciones y resultados

**Ejemplo 1.** Dada la siguiente ecuación diferencial, obtener la función solución en serie de potencias [18, 12].

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = Ay$$

Usando (3.5) y (3.6), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} - Ay &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{x^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha + 1)} - A \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{x^{\alpha n}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazamos en  $n$  por  $n + 1$  en la primera suma

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} - A \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} - A a^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a^{n+1} - Aa^n) \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora hallamos el coeficiente

$$(a^{n+1} - Aa^n) = 0 \Rightarrow a^{n+1} = Aa^n$$

Entonces

$n = 0$	$a = Aa^0 = A$
$n = 1$	$a^2 = Aa^1 \Rightarrow a^2 = A^2$
$n = 2$	$a^3 = Aa^2 \Rightarrow a^3 = A^3$

Sustituyendo (3.5)

$$\begin{aligned} y(x) &= a^0 + a^1 \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + a^2 \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots \\ y(x) &= 1 + A \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + A^2 \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots \end{aligned}$$

La solución general es

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

La solución general se puede escribir.

$$y(x) = E_\alpha(Ax^\alpha)$$

Si  $\alpha = 1$ , la solución exacta es

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{x^n}{\Gamma(n + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ax)^n}{n!} = e^{Ax}$$

En la figura 3.1 la función solución expresada en serie de potencias converge a la función  $y(x) = e^x$ , la cual es la solución de la ecuación diferencial de orden entero  $\frac{dy}{dx} - y = 0$ .



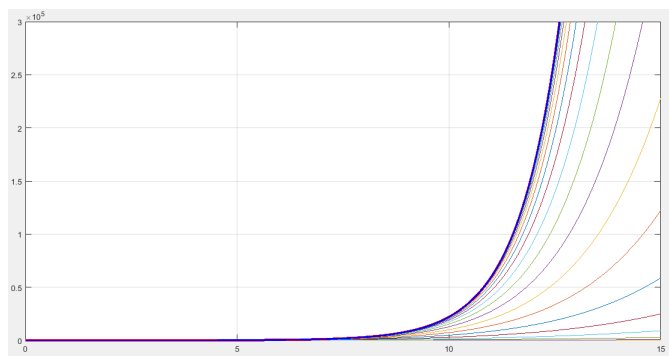


Figura 3.1: Aproximación de la función solución para  $\alpha = 1$  y  $A = 1$

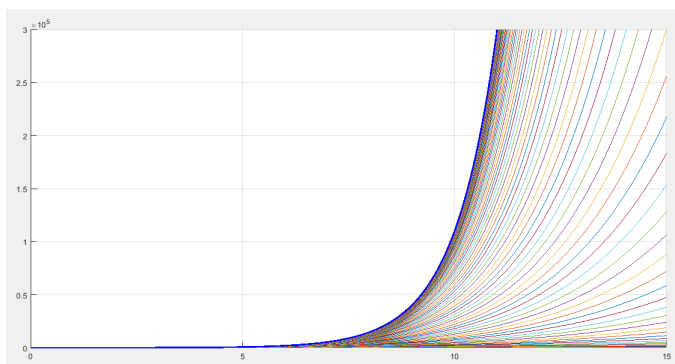


Figura 3.2: Aproximación de la función solución para  $A = 1$  y  $\alpha = 0.2$

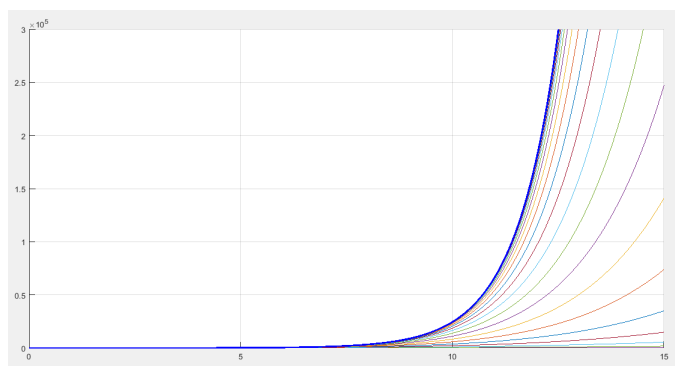


Figura 3.3: Aproximación de la función solución para  $A = 1$  y  $\alpha = 0.9$

Las figuras 3.2, 3.3 y 3.4 representan el comportamiento de la función solución para  $A = 1$  y para diferentes valores de  $0 < \alpha \leq 1$ . Observamos que cuando  $A > 0$  la función es creciente y para valores de  $A < 0$  la función es decreciente y es representada en la figura 3.5.

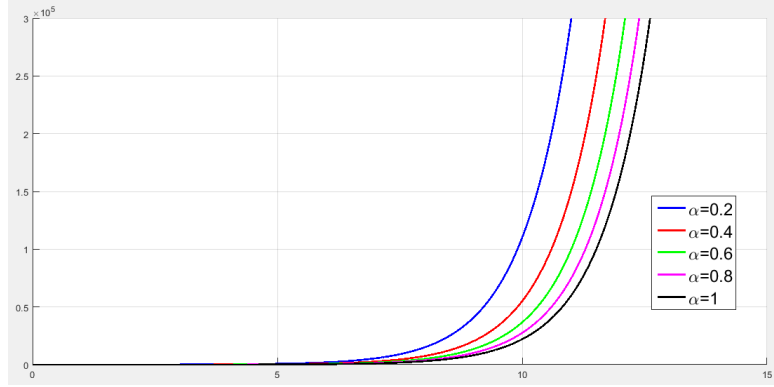


Figura 3.4: Aproximación de la función solución para  $A = 1$  y diferentes valores de  $0 < \alpha \leq 1$

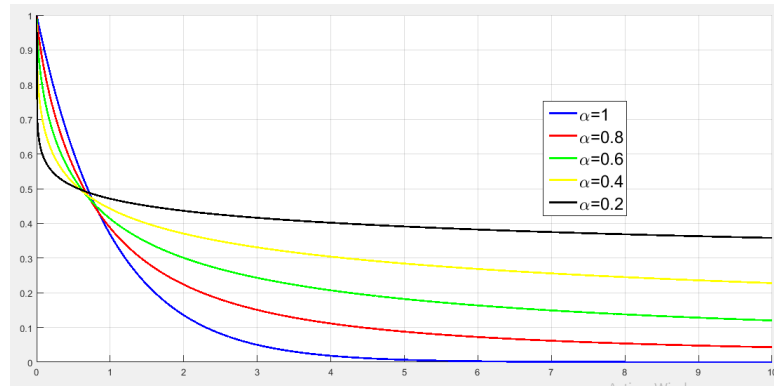


Figura 3.5: Aproximación de la función solución para  $A = -1$  y valores de  $0 < \alpha \leq 1$

**Ejemplo 2.** Dada la siguiente ecuación diferencial, obtener la función solución en serie de potencias [18, 12].

$$\frac{d^{2\alpha}y}{dx^{2\alpha}} - y = 0$$

Usando (3.5) y (3.7)

$$\sum_{n=2}^{\infty} a^n \frac{x^{(n-2)\alpha}}{\Gamma((n-2)\alpha + 1)} - \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 0$$

Reemplazamos  $n$  por  $(n+2)$  en la primera sumatoria

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+2} \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} - \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a^{n+2} - a^n) \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= 0 \end{aligned}$$

Hallamos los coeficientes

$$\begin{aligned} a^{n+2} - a^n &= 0 \\ a^n(a^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Sabemos que

$a^n \neq 0$ , Por lo tanto

$$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 1, a = -1$$

Sustituyendo en (3.5)

$$y(x) = a^0 + a^1 \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + a^2 \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + a^3 \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + a^4 \frac{x^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} + \dots$$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{x^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} + \dots$$

$$y_2(x) = 1 - \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{x^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} - \dots$$

Solución General

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} = E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(-x^\alpha)$$

Representación de la función solución para valores de  $0 < \alpha \leq 1$ :

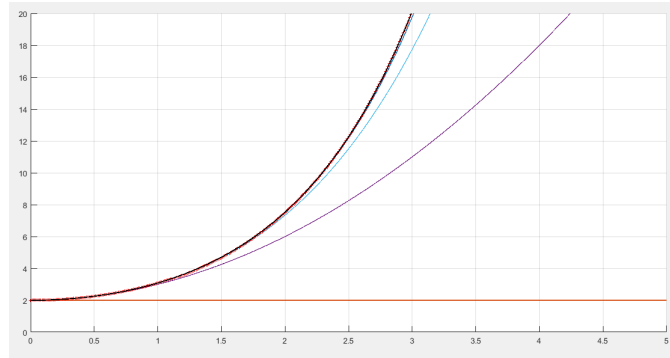
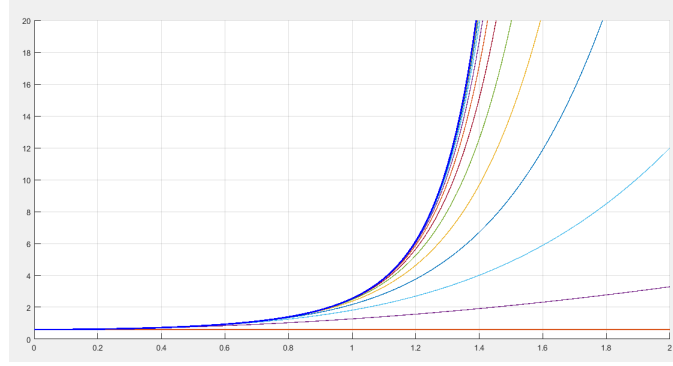
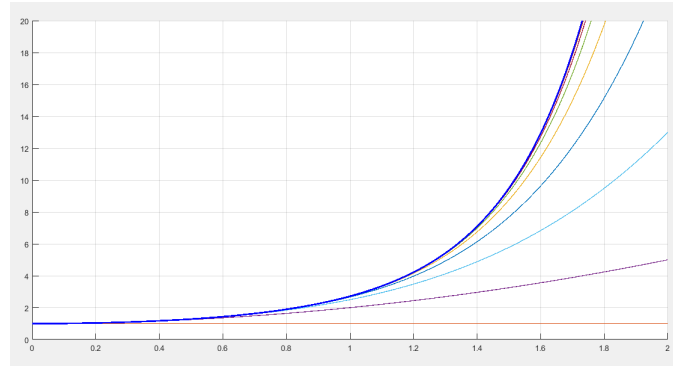
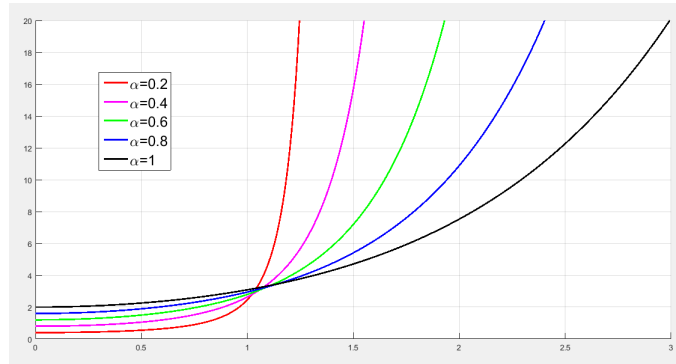


Figura 3.6: Aproximación de la función solución para  $\alpha = 1$

En la figura 3.6 la solución general converge a la función solución  $y(x) = e^x + e^{-x}$ , que es la solución de la ecuación diferencial  $\frac{d^{2\alpha}y}{dx^{2\alpha}} - y = 0$  cuando  $\alpha = 1$ .

Figura 3.7: Aproximación de la función solución para  $\alpha = 0.3$ Figura 3.8: Aproximación de la función solución para  $\alpha = 0.5$ Figura 3.9: Aproximación de la función solución para  $0 < \alpha \leq 1$ 

Las figuras 3.7, 3.8 y 3.9 representan la función solución para valores de  $0 < \alpha \leq 1$ , en las cuales observamos que la solución en serie de potencias converge a una solución exacta, que puede ser expresada por medio de la función Mittag-Leffler  $y(x) = E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(-x^\alpha)$ .

**Ejemplo 3.** Dada la siguiente ecuación diferencial, obtener la función solución en serie de potencias [18, 12].

$$\frac{d^{2\alpha}y}{dx^{2\alpha}} + \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} - 2y = 0$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a^n \frac{x^{(n-2)\alpha}}{\Gamma((n-2)\alpha+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{x^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+2} \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a^{n+2} + a^{n+1} - 2a^n) \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} &= 0 \end{aligned}$$

Identificamos los coeficientes, así

$$\begin{aligned} a^{n+2} + a^{n+1} - 2a^n &= 0 \\ a^n(a^2 + a - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Sabemos que  $a^n \neq 0$ , entonces

$$a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow a = -2, a = 1$$

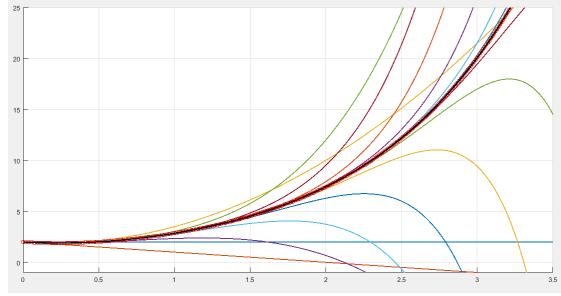
Sustituyendo en 3.5

$$\begin{aligned} y(x) &= a^0 + a^1 \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + a^2 \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + a^3 \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + a^4 \frac{x^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} + \dots \\ y_1(x) &= 1 + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} + \dots \\ y_2(x) &= 1 - \frac{2x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{8x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{16x^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} - \dots \end{aligned}$$

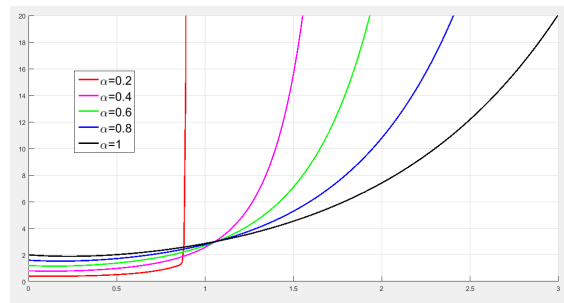
Solución General

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)} = E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(-2x^\alpha)$$

La solución en serie de potencias para  $\alpha = 1$  converge a la función  $y(x) = e^x + e^{-2x}$  que es la solución de la ecuación diferencial  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ , esto se representa en la figura 3.10.

Figura 3.10: Aproximación de la función solución para  $\alpha = 1$ 

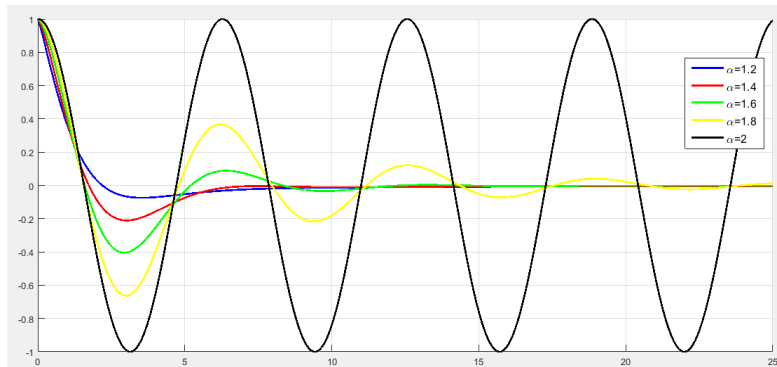
Representación de la función solución para valores de  $0 < \alpha \leq 1$ :

Figura 3.11: Aproximación de la función solución para  $0 < \alpha \leq 1$ 

Las figura 3.11 representa la función solución para valores de  $0 < \alpha \leq 1$ , en las cuales observamos que la solución en serie de potencias converge a una solución exacta, que puede ser expresada por medio de la función Mittag-Leffler  $y(x) = E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(-2x^\alpha)$ .

### 3.5. Análisis de resultados

En el ejemplo 1 cuando  $A < 0$  la función es oscilatoria amortiguada para valores de  $1 < \alpha < 2$  y oscilatoria para  $\alpha = 2$  [8].

Figura 3.12: Solución del ejemplo 1 para valores de  $\alpha > 1$  y  $A = -1$

Cuando  $A > 0$  la función es creciente para valores de  $\alpha > 0$ .

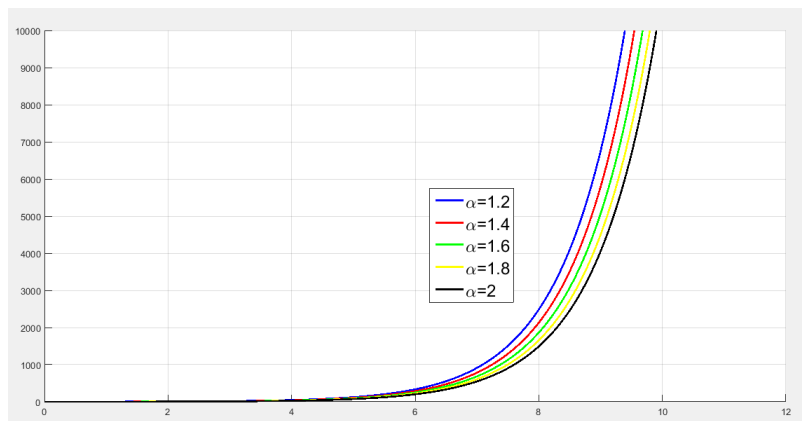


Figura 3.13: Solución del ejemplo 1 para valores de  $\alpha > 1$  y  $A > 0$

En el ejemplo 2 cuando  $1 < \alpha \leq 2$  la función es creciente.

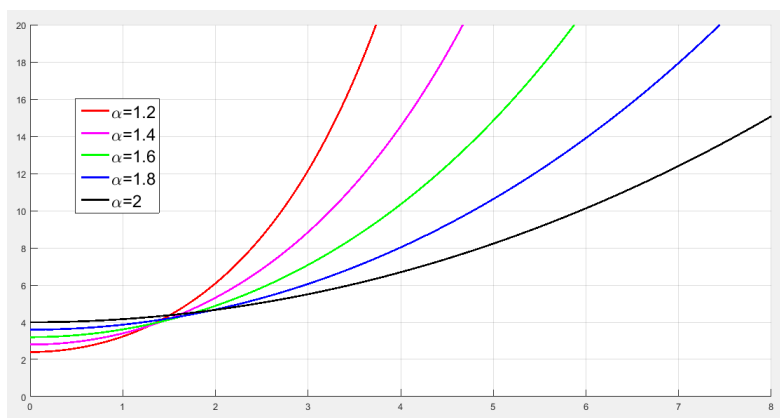


Figura 3.14: Solución del ejemplo 2 para valores de  $1 < \alpha \leq 2$

## Capítulo 4

# Método de la función Mittag-Leffler para ecuaciones diferenciales parciales homogéneas y sus aplicaciones

En este capítulo se explica detalladamente el método de la función Mittag-Leffler para ecuaciones diferenciales parciales homogéneas de orden fraccional, se realizan varios ejemplos aplicados a la ingeniería. El método del capítulo 3 tiene varias similitudes empezando por la imposición de la función Mittag-Leffler, pero solo es válido para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Considere la ecuación diferencial parcial homogénea de orden fraccional [10].

$$D_t^\alpha u(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(x) D_{x_i}^{\delta_i} u(x, t) + A(u(x, t)) \quad (4.1)$$

Sujeto a la condición inicial

$$\frac{\partial^j u(x, 0)}{\partial t^j} = \varphi_j(x),$$

donde  $m - 1 < \alpha$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ ,  $m \in N$ ,  $\delta_i \in N$ ,  $0 \leq t < T$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $a_i(x), \varphi_i(x)$  son funciones de variable  $x$  y  $A(u(x, t))$  es lineal o no lineal en  $u(x, t)$  y  $u_x(x, t)$ . Tenga en cuenta que  $D_t^\alpha u(x, t)$  es la derivada fraccional parcial en el sentido de Caputo de la función  $u(x, t)$  con respecto a  $t$ .

**Definición 4.1.** Derivada fraccional parcial en el sentido de Caputo de orden  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) de una función  $u(x, t)$  se denota por  $D_t^\alpha u(x, t)$ , tenemos [10]:

$$D_t^\alpha u(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial^m}{\partial t^m} u(x, t), & \alpha = m, \quad m \in N \\ I_t^{m-\alpha} \frac{\partial^m}{\partial t^m} u(x, t), & m - 1 < \alpha < m, \quad m \in N \end{cases}$$



Recordemos del capítulo 3, que cuando  $\gamma > -1$  y  $C \in R$ , tenemos  $D_t^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}$  y  $D_t^\alpha C = 0$ .

#### 4.1. Descripción del método para ecuaciones diferenciales parciales homogéneas

Se utiliza la metodología propuesta por YanQin Liu y HongGuang Sun entre otros (2017) tomando como ejemplo una ecuación diferencial fraccionaria homogénea simple [10].

Tenemos,

$$D_t^\alpha u(x, t) = L(u(x, t)), \quad (4.2)$$

Con la condición inicial.

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

donde  $D_t^\alpha$  es la derivada parcial fraccional en el sentido de caputo,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\varphi(x)$  es una función conocida y  $L$  es un operador lineal definido en un espacio  $B$  de Banach a sí mismo.

$$u(x, t) = f(x)E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x)A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (4.3)$$

donde  $A$  es un coeficiente indeterminado, usando la condición inicial  $u(x, 0) = \varphi(x)$  tenemos,

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x)A^n \cdot 0^{n\alpha} = f(x)A^0 0^0 + \dots + 0 = f(x)$$

Por lo tanto,  $f(x) = \varphi(x)$

Utilizando las ecuaciones (3.6), (4.3) y sustituyendo en la ecuación (4.2), tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x)A^n \frac{t^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha + 1)} = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x)A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}\right)$$

Combinando los términos similares y reemplazando  $n$  por  $n+1$  en la primera suma, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x)A^{n+1} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = L(\varphi(x)) \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (4.4)$$

El método se puede aplicar, cuando se cumple la siguiente condición

$$L(\varphi(x)) = B\varphi(x), \quad (4.5)$$

donde  $B$  es una constante.

Siguiendo con el desarrollo de la ecuación (4.4), tenemos

$$\varphi(x) \sum_{n=0}^{\infty} (A^{n+1} - BA^n) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma\alpha + 1} = 0$$

Identificando los coeficientes, observamos

$$A^{n+1} - BA^n = 0 \Rightarrow A^{n+1} = BA^n$$

Si $n = 0$	$A^1 = BA^0 = B$
Si $n = 1$	$A^2 = BA^1 = BA = B^2$
Si $n = 2$	$A^3 = BA^2 = BB^2 = B^3$

Sustituyendo en la ecuación (4.3), la solución general es:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x) \left( 1 + \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{B^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{B^3 t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) \\ &= \varphi(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = \varphi(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Bt^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} = \varphi(x) E_\alpha(Bt^\alpha) \end{aligned}$$

*Observación 4.1.1:* Para las ecuaciones diferenciales no lineales de orden fraccionario, el termino no lineal  $N(u(x, t))$  puede descomponerse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} N(u(x, t)) &= N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x) A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}\right) \\ &= N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x) u_n(t)\right) \\ &= N(\varphi(x)) N\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) = N(\varphi(x)) \left( N(u_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( N\left(\sum_{j=0}^n u_j\right) - N\left(\sum_{j=0}^{n-1} u_j\right) \right) \right) \end{aligned}$$

El método de la función Mittag-Leffler es aplicable cuando  $N(\varphi(x)) = 0$ .

*Observación 4.1.2:* Para la ecuación diferencial fraccional de orden  $1 < \alpha \leq 2$ , sujeta a la condición inicial  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \phi(x)$ , y tenemos que  $f(x) = \varphi(x)$  y  $\phi(x) = 0$ . Por lo tanto si  $\phi(x) \neq 0$  este método no se puede aplicar.

## 4.2. Aplicaciones

**Ejemplo 1:** Considere la siguiente ecuación diferencial de calor (heat-like) en una dimensión [10].

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{2} x^2 D_x^2 u, \quad (4.6)$$

con condiciones de contorno

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = e^t$$

y la condición inicial

$$u(x, 0) = x^2$$

donde  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ . Denotando  $L(u(x, t)) = \frac{1}{2}x^2 u_{xx}$ ,

$$L(x^2) = \frac{1}{2}x^2 D_x^2(x^2) = \frac{1}{2}x^2(2) = x^2 = u(x, 0)$$

Esta ecuación satisface la condición(4.5) y  $B = 1$ , entonces el método es aplicable.

Basándonos de la ecuación (4.4)

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=1}^{\infty} A^n \frac{t^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha + 1)} &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\ x^2 \sum_{n=1}^{\infty} A^n \frac{t^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha + 1)} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando  $n$  por  $n + 1$  en la primera suma, tenemos

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 0$$

Combinando los términos similares.

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (A^{n+1} - A^n) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 0$$

Identificando los coeficientes.

$$A^{n+1} - A^n = 0 \Rightarrow A^{n+1} = A^n$$

$n = 0$	$A = 1$
$n = 1$	$A^2 = A = 1$
$n = 2$	$A^3 = A^2 = A = 1$

Entonces

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\
 &= x^2 \left[ 1 + A \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + A^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + A^3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right] \\
 &= x^2 \left[ 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right] \\
 &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}
 \end{aligned}$$

La solución es:

$$u(x, t) = x^2 E_\alpha(t^\alpha)$$

A continuación se muestra las gráficas de las aproximaciones de las funciones obtenidas con la ecuación anterior, variando el valor de alfa ( $\alpha$ ) :

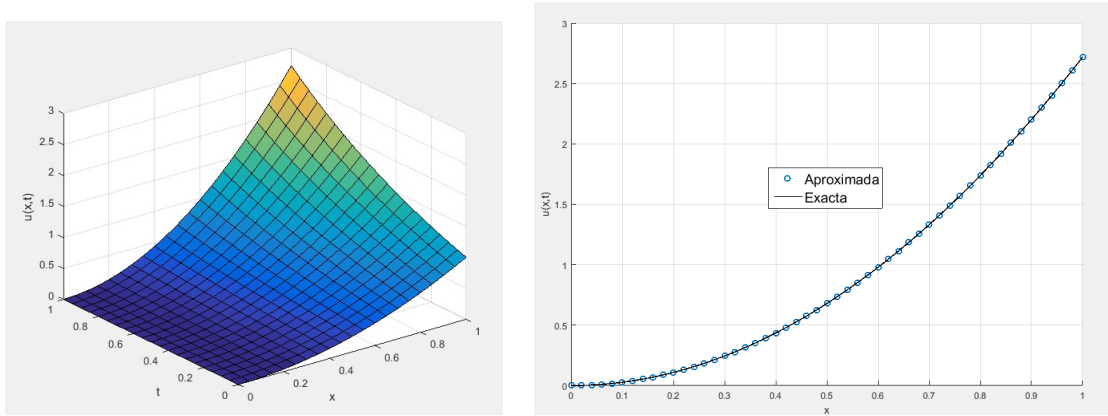
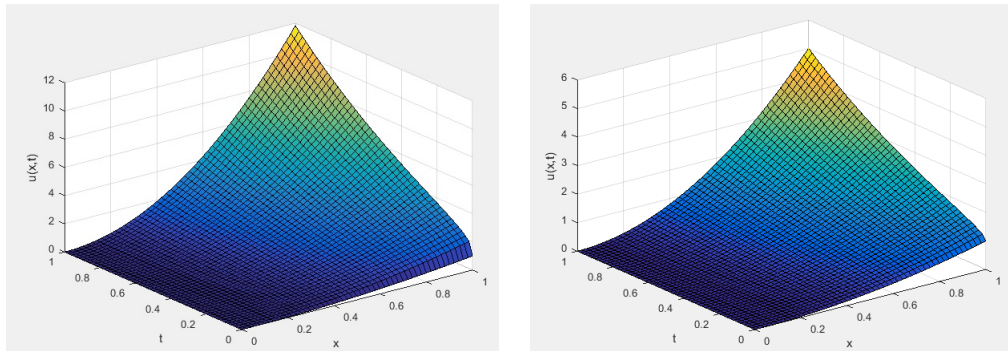


Figura 4.1: Aproximación de la función solución para  $\alpha = 1$

La ecuación (4.6) modela el flujo de calor en una varilla que sus extremos están a temperaturas diferentes (condiciones de contorno).



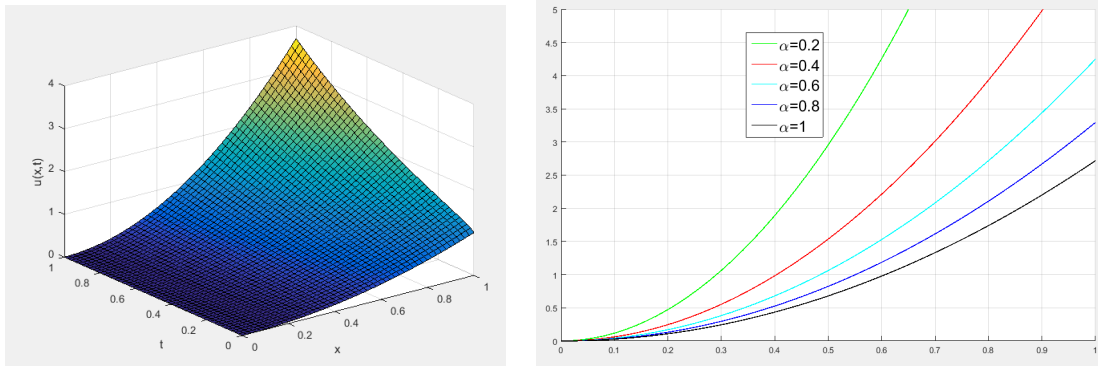


Figura 4.2: Aproximación de la función solución para  $\alpha = 0.2$ ,  $\alpha = 0.5$  y  $\alpha = 0.7$ , respectivamente y diferentes valores de  $\alpha$  para  $t = 1$ .

La solución de esta ecuación es una función de dos variables: una variable espacial (posición a lo largo de la barra) y tiempo. Esta función describe el comportamiento de la temperatura a lo largo de la varilla a medida que pasa el tiempo. Observemos las superficies de las figuras 4.1 y 4.2 que se pueden considerar como un número infinito de instantáneas de tiempo apiladas una tras otra.

En la figura 4.1 la solución converge a la función solución  $u(x, t) = x^2 e^t$ , que es la solución de la ecuación diferencial (4.6) cuando  $\alpha = 1$ , al lado derecho se representa la aproximación exacta con la aproximación de la función solución en  $t = 1$ .

El comportamiento de la función solución para diferentes valores  $0 < \alpha \leq 1$  y  $0 < x \leq 1$  se representa en la figura 4.2.

**Ejemplo 2:** Dada la siguiente ecuación diferencial homogénea de difusión [10].

$$D_t^\alpha u(x, t) = D_{x_1}^2 u(x, t) + D_{x_2}^2 u(x, t) - u(x, t) \quad (4.7)$$

Condición inicial

$$u(x, 0) = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2),$$

donde  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $x = (x_1, x_2) \in R^2$ ,  $t > 0$ .

Denotado  $L(u(x, t)) = D_{x_1}^2 u(x, t) + D_{x_2}^2 u(x, t) - u(x, t)$

$$\begin{aligned} L(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) &= D_{x_1}^2(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \\ &\quad + D_{x_2}^2(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) - (\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \end{aligned}$$

Tenemos que

$$D_{x_1}^2(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) = -\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) - \cos(x_1)\cos(x_2)$$

$$D_{x_2}^2(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) = -\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) - \cos(x_1)\cos(x_2)$$

$$\begin{aligned} L(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) &= -\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) - \cos(x_1)\cos(x_2) - \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) \\ &\quad - \cos(x_1)\cos(x_2) - \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) - \cos(x_1)\cos(x_2) \\ &= -3(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) - \cos(x_1)\cos(x_2)) \\ &= -3u(x, 0) \end{aligned}$$

La ecuación satisface la condición (4.5),  $B = -3$  y basándonos de la ecuación (4.4).

$$\begin{aligned} (\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=1}^{\infty} A^n \frac{t^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha + 1)} = \\ -3(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \end{aligned}$$

Reemplazando  $n$  por  $n + 1$  en la primera suma.

$$\begin{aligned} (\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\ + (\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} 3A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 0 \end{aligned}$$

Combinando los términos similares,

$$(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} (A^{n+1} + 3A^n) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 0$$

Identificamos los coeficientes

$$A^{n+1} + 3A^n = 0 \Rightarrow A^{n+1} = -3A^n$$

Si $n = 0$	$A^1 = -3A^0 = -3$
Si $n = 1$	$A^2 = -3A = (-3)(-3) = (-3)^2$
Si $n = 2$	$A^3 = -3A^2 = (-3)(-3)^2 = (-3)^3$

La solución es:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= (\operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\
&= (\operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \left[ 1 + A \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + A^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots \right] \\
&= (\operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \left[ 1 + (-3) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + (-3)^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots \right] \\
&= (\operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\
&= (\operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) E_\alpha(-3t^\alpha)
\end{aligned}$$

Cuando  $\alpha = 1$ , la solución es:

$$u(x, t) = (\operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3t)^n}{\Gamma(n + 1)} = (\operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) e^{-3t}$$

**Ejemplo 3:** Considere la ecuación parabólica [10]

$$D_t^\alpha u(x, t) = D_x^4 u(x, t) + D_x^2 u(x, t) + u(x, t) \quad (4.8)$$

Con condición inicial

$$u(x, 0) = \cosh(x),$$

donde  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $x \in R$ ,  $t > 0$

$$\begin{aligned}
L(u(x, t)) &= D_x^4 u(x, t) + D_x^2 u(x, t) + u(x, t) \\
L(\cosh(x)) &= D_x^4(\cosh(x)) + D_x^2(\cosh(x)) + \cosh(x)
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$D_x^2(\cosh(x)) = \cosh(x)$$

$$D_x^4(\cosh(x)) = \cosh(x)$$

Entonces

$$L(\cosh(x)) = \cosh(x) + \cosh(x) + \cosh(x) = 3\cosh(x)$$

Esta ecuación satisface la condición (4.5) y  $B = 3$  Basándonos de la ecuación (4.4) y reemplazando  $n$  por  $n + 1$  en la primera suma, tenemos

$$\cosh(x) \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 3 \cosh(x) \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

$$\cosh(x) \sum_{n=0}^{\infty} (A^{n+1} - 3A^n) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 0$$

Identificamos los coeficientes

$$A^{n+1} - 3A^n = 0 \Rightarrow A^{n+1} = 3A^n$$

Si $n = 0$	$A^1 = 3A^0 = 3$
Si $n = 1$	$A^2 = 3A = 3^2$
Si $n = 2$	$A^3 = 3A^2 = 3^3$

La solución es

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \cosh(x) \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\
 &= \cosh(x) \left[ 1 + A \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + A^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots \right] \\
 &= \cosh(x) \left[ 1 + 3 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + 3^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots \right] \\
 &= \cosh(x) E_\alpha(3t^\alpha)
 \end{aligned}$$

A continuación se muestra las gráficas de las aproximaciones de las funciones obtenidas con la ecuación anterior, variando el valor de alfa ( $\alpha$ ).

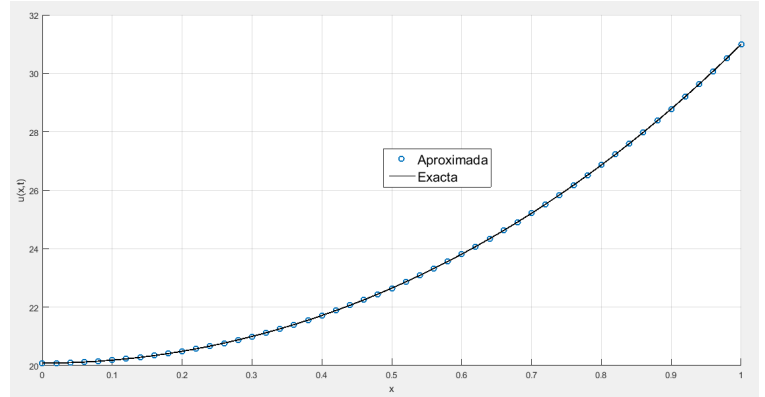
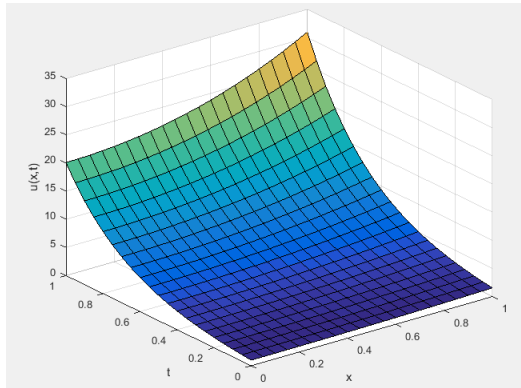


Figura 4.3: Aproximación de la función solución para  $\alpha = 1$



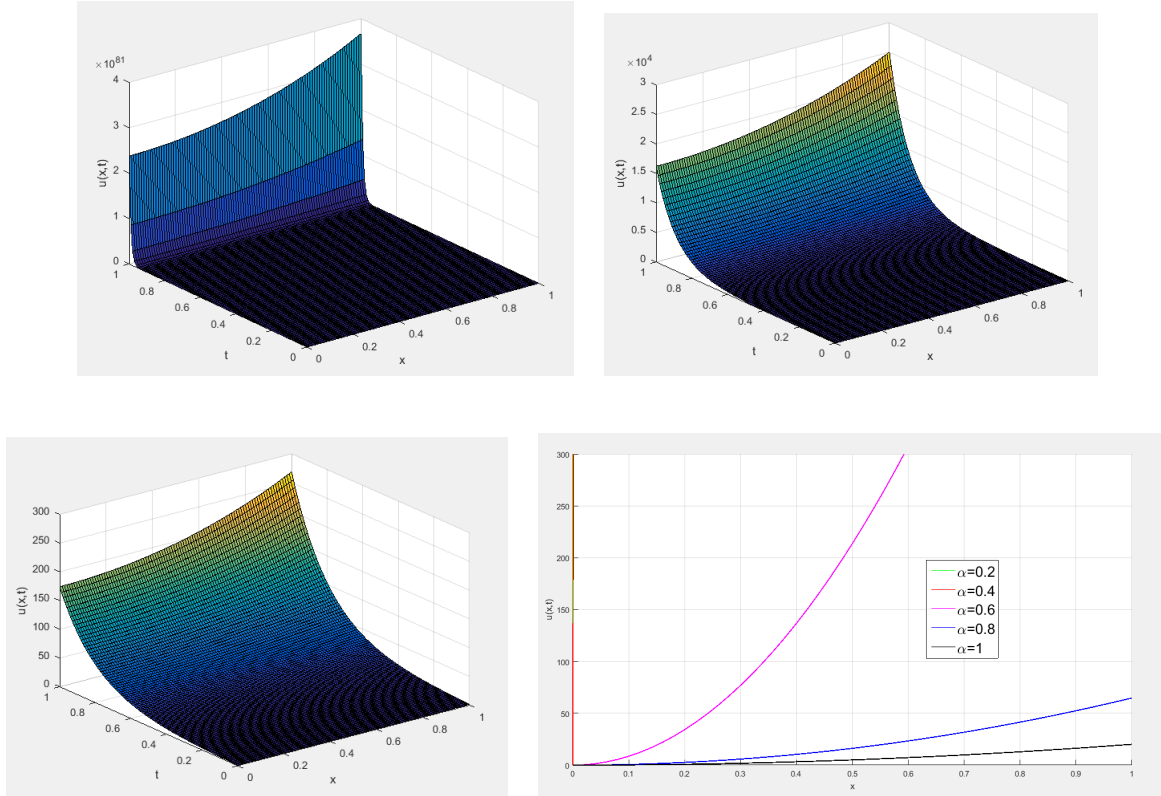


Figura 4.4: Aproximación de la función solución para  $\alpha = 0.2$ ,  $\alpha = 0.5$  y  $\alpha = 0.7$ , respectivamente y diferentes valores de  $\alpha$  para  $t = 1$ .

En la figura 4.3 se observa en el lado izquierdo la aproximación de la función solución de la ecuación diferencial (4.8) cuando  $\alpha = 1$  la cual converge a la función  $u(x, t) = \cosh(x)e^{3t}$  y al lado derecho la aproximación de la función solución y la solución exacta  $u(x, t) = \cosh(x)e^{3t}$  cuando  $t = 1$ .

En la figura 4.4 observamos la función solución de la ecuación (4.8) para diferentes valores de  $0 < \alpha \leq 1$ . Estas gráficas representan la variación de temperatura a lo largo de una varilla a medida que pasa el tiempo ( $0 \leq t \leq 1$ ) y se puede interpretar que conforme avanza el tiempo, notamos que su temperatura va aumentando en toda su longitud. También concluimos que la evolución del sistema es diferente para cada uno de los alfas pero se sigue el mismo patrón de comportamiento de la función solución cuando  $\alpha = 1$ .

**Ejemplo 4:** Dada la siguiente ecuación diferencial de transporte, obtener la función solución en series de potencias [4].

$$D_t^\alpha u(x, t) + \nabla u(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$$

Con la condición inicial

$$u(x, 0) = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)$$

Denotando  $L(u(x, t)) = -\nabla u(x, t)$

$$L\left(\exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\right) = -n e^{(x_1+x_2+\dots+x_n)} = -n \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) = -n u(x, 0)$$

Esta ecuación satisface la condición (4.5) y  $B = -n$ , entonces el método es aplicable.

Basándonos de la ecuación (4.4), tenemos

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \sum_{i=0}^{\infty} A^{i+1} \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} = -n \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}$$

Combinando los términos semejantes

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \sum_{i=0}^{\infty} A^{i+1} \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} + n \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} = 0$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \sum_{i=0}^{\infty} (A^{i+1} + nA^i) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} = 0$$

Identificando los coeficientes

$$A^{i+1} + nA^i = 0 \quad \Rightarrow \quad A^{i+1} = -nA^i$$

si $i = 0$	$A = -nA^0 = -n$
si $i = 1$	$A^2 = -nA = (-n)^2$
si $i = 2$	$A^3 = -nA^2 = -n(-n)^2 = (-n)^3$

La solución es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \left[1 + A \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + A^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots\right] \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \left[1 + (-n) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + (-n)^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots\right] \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-nt^\alpha)^i}{\Gamma(i\alpha + 1)} = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) E_\alpha(-nt^\alpha) \end{aligned}$$

Si  $\alpha = 1$ , tenemos

$$u(x, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) e^{(-nt)}$$

**Ejemplo 5:** Considere la ecuación no lineal de difusión [4].

$$D_t^\alpha u(x, t) - D_x^2 u(x, t) = u^2(x, t) - (u_x^2(x, t)) \quad (4.9)$$

$$0 < \alpha \leq 1, \quad t > 0, \quad x \in R$$

Con la condición inicial

$$u(x, 0) = e^x$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} D_t^\alpha &= D_x^2 u(x, t) + u^2(x, t) - (u_x^2(x, t)) \\ &= L(u(x, t)) + N(u(x, t)), \end{aligned}$$

donde

$$L(u(x, t)) = D_x^2 u(x, t) \quad \text{y} \quad N(u(x, t)) = u^2(x, t) - (u_x^2(x, t))$$

Tenemos

$$L(e^x) = D_x^2(e^x) = e^x; \quad N(e^x) = e^{2x} - e^{2x} = 0$$

Esta ecuación satisface la condición (4.1.1) y  $B = 1$ , por lo tanto el método se puede aplicar. La solución de la ecuación es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^x A^n \frac{t^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha + 1)} = e^x \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

Reemplazamos  $n$  por  $n + 1$  en la primera suma y combinando términos semejantes

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^x A^{n+1} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= e^x \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\ e^x \sum_{n=0}^{\infty} (A^{n+1} - A^n) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= 0 \end{aligned}$$

Identificamos los coeficientes

$$A^{n+1} - A^n = 0 \quad \Rightarrow \quad A^{n+1} = A^n$$

Si $n = 0$	$A = A^0 = 1$
Si $n = 1$	$A^2 = A = 1$
Si $n = 2$	$A^3 = A^2 = 1$

La solución de la ecuación es:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^x A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\ &= e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\ &= e^x E_\alpha(t^\alpha) \end{aligned}$$

A continuación se muestra las gráficas de las aproximaciones de las funciones obtenidas con la ecuación anterior, variando el valor de alfa ( $\alpha$ ).

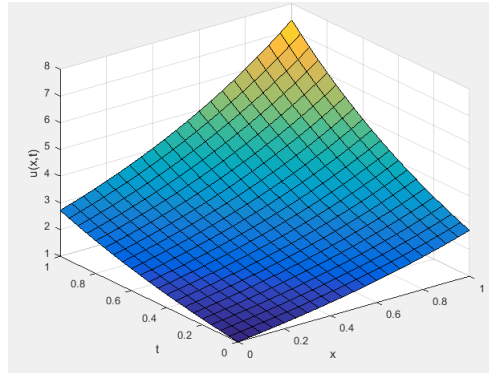


Figura 4.5: Aproximación de la función solución para  $\alpha = 1$

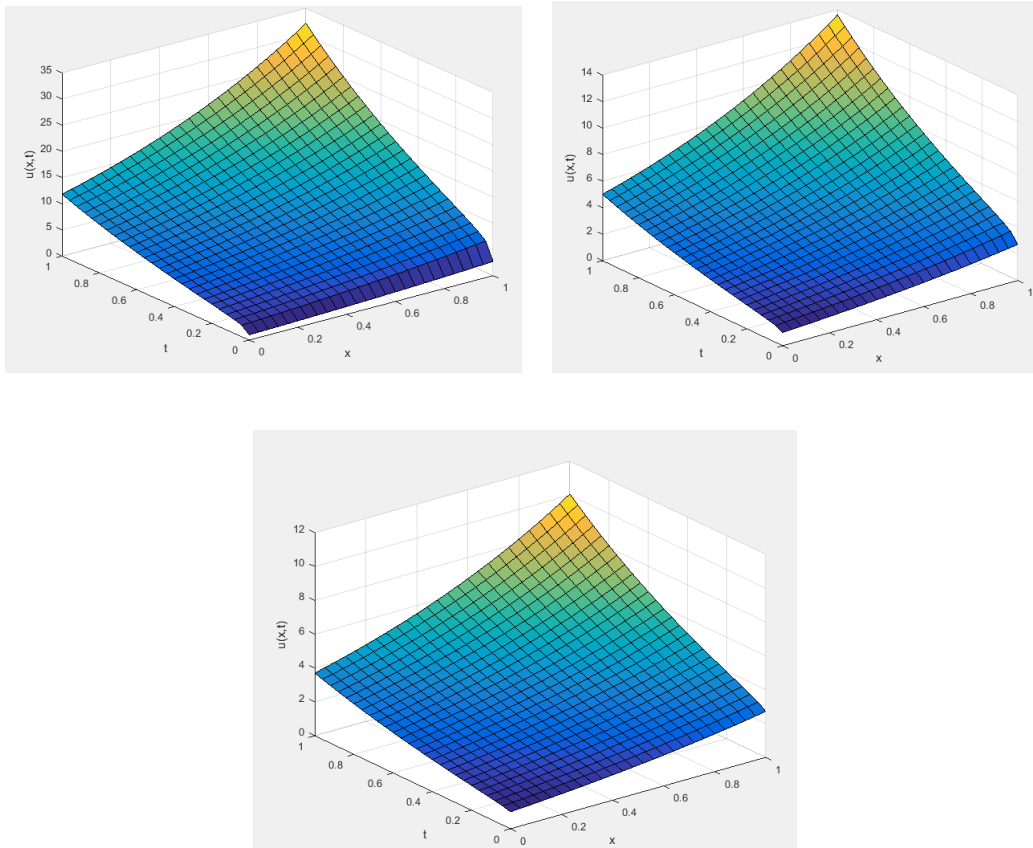


Figura 4.6: Aproximación de la función solución para  $\alpha = 0.2$ ,  $\alpha = 0.5$  y  $\alpha = 0.7$ , respectivamente.

La ecuación de difusión es una de las ecuaciones diferenciales parciales clásicas, describe el proceso de propagación de la difusividad. Tiene una gran cantidad de aplicaciones en diferentes ramas de las ciencias. Este tipo de ecuación surge naturalmente en una variedad

de modelos de física teórica, química y biología. Por ejemplo, las ecuaciones de difusión se utilizan para investigar la conducción del calor, estados estables e histéresis, patrones espaciales, oxigenación de la sangre, impulsos y fenómenos de oscilaciones [22].

La figura 4.6 muestra las soluciones aproximadas para la ecuación diferencial (4.9) obtenidas para los tres valores diferentes de  $\alpha$  utilizando el método de la función Mittag-leffler. La función en series de potencia cuando  $\alpha = 1$  es el único caso para el que sabemos que la solución exacta es  $u(x, t) = e^x e^t$ , figura 4.5.

**Ejemplo 6:** Dada la siguiente ecuación de onda en dos dimensiones [4].

$$D_t^\alpha u(x, t) = D_{x_1}^2 u(x, t) + D_{x_2}^2 u(x, t) - 2u(x, t)$$

$$1 < \alpha \leq 2, \quad t > 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

Se cumple la condición de la observación (4.1.2),  $u_t(x, 0) = \phi(x)$  y  $\phi(x)$  debe ser 0.

$$L(u(x, t)) = D_{x_1}^2 u(x, t) + D_{x_2}^2 u(x, t) - 2u(x, t)$$

$$\begin{aligned} L(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) &= D_{x_1}^2 (\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \\ &+ D_{x_2}^2 (\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) - 2(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \end{aligned}$$

Realizamos la respectivas derivadas,

$$\begin{aligned} L(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) &= -\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) - \cos(x_1)\cos(x_2) \\ &- \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) - \cos(x_1)\cos(x_2) - 2\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) &= -4(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \\ &= -4u(x, 0) \end{aligned}$$

Esta ecuación satisface la condición (4.5) y  $B = -4$ , entonces el método se puede aplicar. Basándonos de la ecuación (4.4), tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) A^n \frac{t^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha + 1)} = \\ -4(\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \end{aligned}$$

Reemplazamos  $n$  por  $(n + 1)$  y combinando los términos semejantes, tenemos.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (\sen(x_1)\sen(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) A^{n+1} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\ + 4(\sen(x_1)\sen(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 0, \\ (\sen(x_1)\sen(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} (A^{n+1} + 4A^n) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 0 \end{aligned}$$

Identificando los coeficientes

$$A^{n+1} + 4A^n = 0 \Rightarrow A^{n+1} = -4A^n$$

Si $n = 0$	$A = -4A^0 = -4$
Si $n = 1$	$A^2 = -4A = (-4)^2$
Si $n = 2$	$A^3 = -4A^2 = (-4)^3$

La solución es:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (\sen(x_1)\sen(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\ &= (\sen(x_1)\sen(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\ &= (\sen(x_1)\sen(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) E_\alpha(-4t^\alpha) \end{aligned}$$

Si  $\alpha = 1$ , tenemos

$$u(x, t) = (\sen(x_1)\sen(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)) e^{-4t}$$

## Capítulo 5

# Aplicación de otros métodos en la solución de casos aplicados

Los resultados obtenidos en los capítulos 4 y 5 se comprobarán utilizando los métodos de la transformada de Laplace y el método iterativo. Los resultados con estas técnicas deben coincidir con los resultados obtenidos con el método de la función Mittag-Leffler.

Se realizará la siguiente ecuación diferencial por el método de transformada de Laplace,

**Ejemplo 1:** Considere el siguiente problema de valor inicial [5].

$$\begin{cases} D^\alpha y(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

La segunda condición inicial es para  $\alpha > 1$ ,

En los dos casos para  $\alpha$ ,  $L[D^\alpha f(x)]$  se obtiene como:

1. Para  $\alpha < 1$

$$L[D^\alpha f(x)] = \frac{s^2 F(s) - s}{s^{2-\alpha}} = \frac{sF(s) - 1}{s^{1-\alpha}}$$

2. Para  $\alpha > 1$

$$L[D^\alpha f(x)] = \frac{sF(s) - 1}{s^{1-\alpha}}$$

Ahora la transformada de Laplace,  $F(s)$  se obtiene como

$$\frac{sF(s) - 1}{s^{1-\alpha}} + F(s) = 0$$

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{1 + s^\alpha}$$

**Lema 5.1** Para  $\alpha, \beta > 0$ ,  $a \in R$  y  $s^\alpha > |a|$  tenemos la formula de la transformada inversa de Laplace.

$$L^{-1} \left[ \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha+a}} \right] = x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-ax^\alpha)$$

Por lo tanto, la solución exacta de este problema es

$$y(x) = E_\alpha(-x^\alpha)$$

Para comprobar el método generalizado de la función Mittag-Leffler, se realizará el ejercicio anterior utilizando este método.

**Ejemplo 1:** Considere el siguiente problema de valor inicial.

$$\begin{cases} D^\alpha y(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Usando la ecuación (3.6) y (3.7), tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{x^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha + 1)} + \sum_{n=0}^{\alpha} a^n \frac{x^{\alpha n}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 0$$

Reemplazamos en  $(n)$  por  $(n+1)$  en la primera sumatoria

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} + \sum_{n=0}^{\alpha} a^n \frac{x^{\alpha n}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a^{n+1} + a^n) \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= 0 \end{aligned}$$

Hallamos los coeficientes

$$a^{n+1} + a^n = 0$$

$$a^{n+1} = -a^n$$

Si $n = 0$	$a = -a^0 = -1$
Si $n = 1$	$a^2 = -a = 1$
Si $n = 2$	$a^3 = -a^2 = -1$
Si $n = 3$	$a^4 = -a^3 = 1$

Sustituyendo en (3.5)



$$y(x) = \frac{a^0 x^0}{\Gamma(1)} + \frac{ax^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{a^2 x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \dots$$

$$y(x) = \frac{x^0}{\Gamma(1)} - \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \dots$$

Solución general

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)} = E_\alpha(-x^\alpha)$$

A continuación se resuelve los ejemplos (2) y (3) del capítulo 4 con el método iterativo; y así confirmar la validez del método generalizado de la función Mittag-Leffler, resolviendo los ejemplos anteriores con una técnica diferente.

**Ejemplo2:** Dada la siguiente ecuación diferencial homogénea de difusión [4].

$$D_t^\alpha u(x, t) = D_{x_1}^2 u(x, t) + D_{x_2}^2 u(x, t) - u(x, t)$$

Condición inicial

$$u(x, 0) = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2),$$

donde  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $x = (x_1, x_2) \in R^2$ ,  $t > 0$

Es equivalente a la ecuación integral.

$$u(x, t) = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2) + I_t^\alpha (D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 - 1)u(x, t)$$

Aplicando el método iterativo, tenemos

$$u_0 = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2)$$

$$u_1 = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2) \frac{-3t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$u_2 = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2) \frac{(-3t^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

En general, tenemos

$$u_i = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_1)\cos(x_2) \frac{(-3t^\alpha)^i}{\Gamma(i\alpha+1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

La solución del problema de Cauchy es

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} = (\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \text{cos}(x_1)\text{cos}(x_2)E_{\alpha}(-3t^{\alpha}))$$

**Ejemplo 3:** Considere la ecuación parabólica [4].

$$D_t^{\alpha}u(x, t) = D_x^4u(x, t) + D_x^2u(x, t) + u(x, t)$$

Condición inicial

$$u(x, 0) = \cosh(x)$$

Problema de valor inicial

$$u(x, t) = \cosh(x) + I_t^{\alpha}(D_x^4u(x, t) + D_x^2u(x, t) + u(x, t))$$

Aplicando el método iterativo, tenemos

$$u_0 = \cosh(x)$$

$$u_1 = \cosh(x) \frac{3t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

$$u_2 = \cosh(x) \frac{(3t^{\alpha})^2}{\Gamma(2\alpha + 1)}$$

En general, tenemos

$$u_i = \cosh(x) \frac{(3t^{\alpha})^i}{\Gamma(i\alpha + 1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Así la solución del problema de valor inicial es:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = \cosh(x) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(3t^{\alpha})^i}{\Gamma(i\alpha + 1)} = \cosh(x)E_{\alpha}(3t^{\alpha})$$

# Conclusiones

En este trabajo se aplicó el método de la función Mittag-Leffler para la resolución de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario [18, 10] para comprender esta técnica se investigó conceptos básicos del calculo fraccional, también otros conceptos importantes como lo es el comportamiento de la función Gamma la cual es fundamental para comprender y entender la integral y derivada de Riemman-Liouville [14, 17].

En este método se utilizó la deriva en el sentido de Caputo, esta derivada se diferencia en que primero se realiza una derivada de orden entero a la función y después se realiza la integral fraccionaria. La ventaja de esta derivada con respecto a las ecuaciones diferenciales es la de definir las condiciones iniciales de orden entero para ecuaciones diferenciales de orden fraccional [18].

La técnica se basa principalmente en la función Mittag-Leffler definida en el dominio de los reales positivos en donde  $z = at^\alpha$  y de sus derivadas en el sentido de Caputo. El primer método [18] que se estudió fue el realizado por Rida y Arafa (2011), el cual construye una función solución en series de potencias[14]; se inicia reemplazando en la ecuación diferencial por la función y sus derivadas, después se combina los términos equivalentes, se comparan los coeficiente con potencias idénticas y finalmente se obtienen los coeficientes. Este método solo es válido cuando se satisface una ecuación diferencial lineal homogénea. El método se comprobó por medio de gráficas en Matlab en donde la solución dada en series de potencias con  $\alpha = 1$  converge a la ecuación solución cuando el orden de la ecuación diferencial es entera, también se graficaron la soluciones de cada uno de los ejemplos variando  $0 < \alpha \leq 1$ , y variando los valores de los coeficientes.

En el ejemplo 1 del capítulo 3, se realizó una prueba con la solución general  $A < 0$  y variando el valor de  $\alpha$ ; se obtuvo que cuando  $A = -1$  y  $1 < \alpha < 2$  la función es oscilatoria amortiguada y para  $A = -1$  y  $\alpha = 2$  la función se comporta como una oscilatoria (figura 3.18).

Para las ecuaciones diferenciales parciales homogéneas de orden fraccionario [10], se explicó el método realizado por YanQin Liu, HongGuang Sun entre otros (2017), este método es similar a la técnica anterior, pero este tiene en cuenta los problemas de valor inicial. La técnica utilizada tiene varias restricciones para que sea válida aplicarla; la primera para las ecuaciones diferenciales lineales se debe satisfacer la condición (4.5), La segunda para ecuaciones diferenciales no lineales, el término no lineal debe satisfacer la condición de la

observación (4.1.1), y la tercera para ecuaciones diferenciales de orden fraccionario donde  $1 < \alpha \leq 2$  debe cumplir la condición de la observación (4.1.2).

En el capítulo 5, se realizaron varios ejemplos en los cuales se utilizó otro método diferente al de la función Mittag-Leffler para comprobar los ejemplos de los capítulos anteriores. Los métodos utilizados en este capítulo fueron el método de la transformada de Laplace y el método de iteración [5, 4].

Se aplicó el método para algunas aplicaciones en física como los son: la ecuación diferencial de calor, difusión, parabólica, transporte, ecuación diferencial no lineal de difusión y ecuación diferencial de onda. Para cada uno de estas ecuaciones diferenciales la solución se puede comprobar con el método de iteración, en el cual la solución va ser igual al método de la función Mittag-Leffler [5, 4].

En la aproximación a la función solución realizada en Matlab podemos observar que la evolución del sistema es diferente para cada uno de los alfas pero se sigue el mismo patrón de comportamiento de la función solución cuando  $\alpha = 1$ .

Esta técnica es eficiente y poderosa para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales lineales y no lineales homogéneas, pero teniendo en cuenta que el método solo es válido cuando se cumple con ciertas condiciones y además que la solución se pueda expresar en series de potencias [18, 10].

# Bibliografía

- [1] Atangana, A., & Alabaraoye, E. (2013). *Exact solutions fractional heat-like and wave-like equations with variable coefficients*. Scientific Reports, 2(633).
- [2] Bagley, R. L. (1990). *On the fractional order initial value problem and its engineering applications*. In International Conference Proceedings, Tokyo (pp. 12-20).
- [3] Cárdenas P. P et al. (2017). *An Iterative Method for Solving Delay Differential Equations Applied to Biological Models*. Applied Mathematical Sciences.
- [4] Dhaigude, C., & Nikam, V. (2012). *Solution of fractional partial differential equations using iterative method*. Fractional Calculus and Applied Analysis, 15(4), 684-699.
- [5] Kazem, S. (2013). *Exact solution of some linear fractional differential equations by Laplace transform*. International Journal of nonlinear science, 16(1), 3-11.
- [6] Kemple, S., & Beyer, H. (1997). Global and causal solutions of fractional differential equations in: Transform Method and Special Functions. In Varna96, Proceeding of the 2nd International Workshop (SCTP), Singapore.
- [7] Kishan, S. H. A. R. M. A. (2014). *A method for the solution of fractional differential equations using generalized Mittag-Leffler function*. African Journal of Mathematics and Computer Science Research, 7(3), 41-46.
- [8] Laboret, S, (2012). *Control robusto mediante controladores de orden fraccional* (Tesis de maestria). Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.
- [9] Leithold, L., & Fagoaga, J. C. V. (1998). *El cálculo* (Vol. 7). Harla: Oxford University Press.
- [10] Liu, Y., Sun, H., Yin, X., & Xin, B. (2017). *A new Mittag-Leffler function undetermined coefficient method and its applications to fractional homogeneous partial differential equations*. Journal of nonlinear sciences and applications, 10(8), 4515-4523.
- [11] Mathai, A. M., & Haubold, H. J. (2008). *Mittag-Leffler functions and fractional calculus*. Special Functions for Applied Scientists.
- [12] Odibat, Z. M., & Shawagfeh, N. T. (2007). *Generalized Taylor's formula*. Applied Mathematics and Computation, 186(1), 286-293.

- [13] Odibat, Z. M. (2010). *Analytic study on linear systems of fractional differential equations*. Computers & Mathematics with Applications, 59(3), 1171-1183.
- [14] Ortigueira, M. D. (2011). *Fractional calculus for scientists and engineers (Vol. 84)*. Springer Science & Business Media.
- [15] Podlubny, I. (1998). *Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives*, Academic Press, San Diego, CA.
- [16] Prieto R. *El cálculo generalizado y las funciones fraccionarias*. Instituto Tecnológico Autónomo de México. México D.F. 2009.
- [17] Rodriguez, D. F. (2008). *Cálculo Fraccional: Un enfoque a la Teoría de Riemann-Liouville*. Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Bogota, 2008.
- [18] Rida, S. Z., & Arafa, A. A. M. (2011). *New method for solving linear fractional differential equations*. International journal of differential equations, 2011.
- [19] Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*.
- [20] Seybold H. J. & Hilfer R. *Numerical Results For The Generalized Mittag-Leffler Function. An international Journal for Theory and Applications*. 8 (2005), 127-139.
- [21] Singh, B. K., & Srivastava, V. K. (2015). *Approximate series solution of multi-dimensional, time fractional-order (heat-like) diffusion equations using FRDTM*. Royal Society open science, 2(4), 140511.
- [22] Zakeri, A., Aminataei, A., & Jannati, Q. (2010). *Application of He's homotopy perturbation method for Cauchy problem of ill-posed nonlinear diffusion equation*. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2010.